# Bas och koordinater

Jun 23, 2026, 17 min read

#linjär-algebra #vektorrum #bas

## 1. Vad är en bas?

> 3B1B: Linear combinations, span, and basis vectors

I V4L2 M0067M lärde vi oss två begrepp:

- **Span** — vilka vektorer kan vi *nå*?
- Linjärt oberoende — är vår vektormängd *effektiv* (inga onödiga)?

En **bas** kombinerar dessa två krav. Den är en vektormängd som är precis lagom stor: stor nog att nå allting, men utan överflödiga vektorer.

### 1.1 Definition

> **Definition: Bas**
>
> Låt $W$ vara ett underrum till ett vektorrum $V$.
>
> En mängd $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_p\}$ är en **bas** för $W$ om:
>
> 1. $B$ är **linjärt oberoende**
> 2. $B$ **spänner upp** $W$, dvs. $\text{span}(B) = W$

**Intuition:** En bas är den *minimala* uppsättningen vektorer som fortfarande kan bygga allt i rummet. Ta bort en vektor och du kan inte längre nå allt. Lägg till en och den är överflödig.

### 1.2 Geometrisk intuition

| Rum | Bas behöver… | Exempel |
|---|---|---|
| En linje genom origo | 1 vektor (i linjens riktning) | $\{(1,2)\}$ för linjen $y = 2x$ |
| $\mathbb{R}^2$ | 2 ej parallella vektorer | $\{(1,0),\ (0,1)\}$ |
| Ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ | 2 ej parallella vektorer i planet | $\{(1,0,0),\ (0,1,0)\}$ för $xy$ -planet |
| $\mathbb{R}^3$ | 3 vektorer som inte ligger i samma plan | $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ |

---

## 2. Standardbaser

Varje "vanligt" vektorrum har en naturlig, enkel bas som kallas **standardbasen**.

### 2.1 Standardbas för $\mathbb{R}^n$

I $\mathbb{R}^n$ är standardbasen:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

där $\vec{e}_i$ har en etta i position $i$ och nollor överallt annars.

Standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ >

### 2.2 Standardbas för $\mathcal{P}_n$

I polynomrummet $\mathcal{P}_n$ (polynom med grad $\leq n$) är standardbasen:

$$\{1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n\}$$

Standardbaser för polynomrum >

### 2.3 Standardbas för $M_{m \times n}$

I matrisrummet $M_{m \times n}$ är standardbasen mängden av alla matriser med exakt en etta och resten nollor.

Standardbasen för $M_{2 \times 2}$

---

## 3. Är en given mängd en bas? — metod

För att kontrollera om $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ är en bas för ett rum med dimension $n$:

**Steg-för-steg:**

1. Skriv vektorerna som **kolumner** i en matris $A$
2. **Radreducera** till trappstegsform
3. Kontrollera:
   - Varje **kolumn** har en pivot → linjärt oberoende ✓
   - Varje **rad** har en pivot → spänner upp ✓
   - **Båda** gäller → bas ✓

**Genväg: räkna vektorer**

Om du vet att rummet har dimension $n$ och du har exakt $n$ vektorer, räcker det att kontrollera **ett** av villkoren (oberoende ELLER spänner upp) — det andra följer automatiskt! Detta beror på att en $n \times n$-matris har en pivot i varje kolumn *om och bara om* den har en pivot i varje rad.

Räkneexempel: Är tre polynom en bas för $\mathcal{P}_2$? (möjlig tentauppgift)

Räkneexempel: Två vektorer i $\mathbb{R}^2$

---

# 4. Unik representation — varför baser är så användbara

Den centrala anledningen till att baser är viktiga är att de ger oss ett **koordinatsystem**.

**Sats: Unik representation**

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_p\}$ vara en **bas** för vektorrummet $V$.

För varje $\vec{x} \in V$ finns en **unik** uppsättning skalärer $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sådana att

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_p\vec{b}_p$$

**Varför?** Beviset har två delar:

1. **Existens:** Eftersom $B$ spänner upp $V$ kan varje $\vec{x}$ skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.
2. **Unikhet:** Antag att det finns *två* representationer: $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_p\vec{b}_p \quad \text{och} \quad \vec{x} = d_1\vec{b}_1 + \cdots + d_p\vec{b}_p$ Subtrahera: $(c_1 - d_1)\vec{b}_1 + \cdots + (c_p - d_p)\vec{b}_p = \vec{0}$. Eftersom $B$ är linjärt oberoende måste $c_i - d_i = 0$ för alla $i$, alltså $c_i = d_i$. Representationen var densamma! ∎

**Varför spelar det roll?**

Utan unikhet hade koordinater varit meningslösa — samma vektor kunde ha olika "adresser". Unikheten garanterar att varje vektor har **exakt en** uppsättning koordinater relativt en given bas, precis som varje punkt på en karta har exakt en GPS-position.

---

# 5. Koordinater relativt en bas

> [3B1B: Change of basis](#)

## 5.1 Definition

**Definition: Koordinatvektor**

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ vara en bas för $V$ och låt $\vec{x} \in V$.

Om $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_p\vec{b}_p$ kallas

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

**koordinatvektorn** för $\vec{x}$ relativt basen $B$.

**Med andra ord:** koordinatvektorn talar om "hur mycket av varje basvektor" som behövs för att bygga $\vec{x}$.

**Koordinater beror på basen!**

Samma vektor $\vec{x}$ får **olika** koordinater beroende på vilken bas man väljer. Basen fungerar som ett "perspektiv" — byt perspektiv och siffrorna ändras, men vektorn i sig är densamma.

### 5.2 Specialfall: standardbasen

Om $B$ är standardbasen $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$, så är koordinatvektorn identisk med själva vektorn:

$$[\vec{x}]_{\text{standard}} = \vec{x}$$

Det är därför vi "normalt" inte tänker på koordinater — vi jobbar redan i standardbasen utan att reflektera över det.

---

### 5.3 Exempel

Koordinater i $\mathbb{R}^2$: givet koordinatvektor, hitta $\vec{x}$ >

Koordinater i $\mathbb{R}^2$: givet $\vec{x}$, hitta koordinatvektorn >

Koordinater i $\mathcal{P}_2$ >

---

## 6. Räkneregler för koordinater

Koordinatvektorn bevarar de linjära operationerna — addition och skalärmultiplikation "fungerar likadant" i koordinater som i originalrummet.

**Sats: Linjäritet hos koordinatavbildningen**

Låt $B$ vara en bas för $V$ och låt $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

$$[\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B \; [c\vec{u}]_B = c\,[\vec{u}]_B$$

**Varför?** Om $\vec{u} = \sum a_i \vec{b}_i$ och $\vec{v} = \sum d_i \vec{b}_i$, så $\vec{u} + \vec{v} = \sum (a_i + d_i)\vec{b}_i$, och koordinatvektorn för summan är just summan av koordinatvektorerna.

**Vad detta innebär**

Att lösa problem i ett "komplicerat" vektorrum (polynom, matriser, funktioner...) kan alltid **översättas** till att lösa motsvarande problem i $\mathbb{R}^n$ via koordinater. Denna koppling kallas **isomorfi** — rummen "ser likadana ut" algebraiskt.

---

## 7. Koordinater bevarar linjärt oberoende

**Sats: Oberoende bevaras av koordinatavbildningen**

Låt $V$ vara ett vektorrum med bas $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$.

Då gäller för vektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$:

$$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \text{ linjärt oberoende i } V \iff \{[\vec{v}_1]_B, \ldots, [\vec{v}_m]_B\} \text{ linjärt oberoende i } \mathbb{R}^n$$

**Bevis ($\Leftarrow$):** Antag att koordinatvektorerna är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$. Vi vill visa att originalvektorerna är oberoende i $V$.

Sätt $c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_m\vec{v}_m = \vec{0}$.

Ta koordinater relativt $B$ på båda sidor och använd linjäriteten:

$$[c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_m\vec{v}_m]_B = [\vec{0}]_B \; c_1[\vec{v}_1]_B + \cdots + c_m[\vec{v}_m]_B = \vec{0}$$

Eftersom koordinatvektorerna är linjärt oberoende: $c_1 = \cdots = c_m = 0$. ∎

(Den andra riktningen bevisas helt analogt.)

**Praktisk konsekvens**

**Du behöver aldrig jobba direkt med polynom, matriser eller andra abstrakta vektorer** när du vill kontrollera linjärt oberoende — översätt till koordinater i $\mathbb{R}^n$ och radreducera som vanligt. Det är exakt vad vi har gjort i alla polynom- och matrisexempel hittills!

---

## 8. En kommentar om mängdnotation

Vi skriver baser med **mängdparenteser** $\{\ \}$. Formellt innebär detta att:

- **Ordningen spelar ingen roll:** $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \{\vec{b}_2, \vec{b}_1\}$ som mängder
- **Inga dubbletter:** $\{\vec{v}, \vec{v}\} = \{\vec{v}\}$

**I praktiken spelar ordningen roll ändå!**

Även om mängdnotationen säger att ordning inte spelar roll, **beror koordinatvektorn på vilken ordning vi listar basvektorerna**. Om vi byter ordning på $\vec{b}_1$ och $\vec{b}_2$ i basen flippar vi koordinaterna:

$$[\vec{x}]_{\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{men} \quad [\vec{x}]_{\{\vec{b}_2,\vec{b}_1\}} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Därför bör man strikt sett använda **ordnade** mängder (tupler) för baser, men konventionen i de flesta läroböcker är att använda $\{\ \}$ och underförstå att ordningen är given.

---

# 9. Beslutsträd

## Är $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ en bas för $V$?

```
flowchart TD
    A["Givet: {v₁, ..., vₚ} i V med dim(V) = n"] --> B{"Har du rätt antal\nvek
    B -- "p ≠ n" --> NO["INTE EN BAS\np < n → kan inte spänna upp\np > n → kan
    B -- "p = n" --> C["Skriv vektorerna som kolumner\ni en n×n-matris och rad
    C --> D{"Har varje kolumn\nen pivot?\n(ekvivalent: har varje\nrad en pivot
    D -- Ja --> YES["BAS ✓\n• Linjärt oberoende ✓\n• Spänner upp V ✓"]
    D -- Nej --> NO2["INTE EN BAS\nVektorerna är linjärt beroende\noch spänner
```

## Hitta koordinater $[\vec{x}]_B$

```
flowchart TD
    A["Givet: bas B = {b₁,...,bₙ}\noch vektor x ∈ V"] --> B["Sätt upp ekvatione
    B --> C["Skriv som utökad matris\n[b₁ | b₂ | ... | bₙ | x]"]
    C --> D["Radreducera till\nreducerad trappstegsform"]
    D --> E["Läs av c₁, c₂, ..., cₙ\nfrån sista kolumnen"]
    E --> F["Svaret:\n[x]_B = (c₁, c₂, ..., cₙ)"]
```

---

# 10. Övningsuppgifter

### Bas-uppgifter

Uppgift 1: Bas för $\mathbb{R}^3$?

Uppgift 2: Bas för $\mathcal{P}_2$?

---

### Koordinat-uppgifter

Uppgift 3: Hitta koordinater i $\mathbb{R}^2$

Uppgift 4: Koordinater i polynomrum

Uppgift 5: Från koordinater till vektor

---

### Konceptuella uppgifter

Uppgift 6: Sant eller falskt? (med motivering)

Uppgift 7: Visa att koordinatavbildningen bevarar addition

---

## Resurser

### Videor

- 3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors (kap 2) — vad en bas är och varför den behövs
- 3Blue1Brown: Change of basis (kap 13) — koordinater relativt olika baser
- 3Blue1Brown: Abstract vector spaces (kap 16) — baser i abstrakta vektorrum

## Wikipedia

- Basis (linear algebra)
- Coordinate vector
- Standard basis

## Fördjupning

- Immersive Linear Algebra — Chapter 6: The Vector Space
- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Basis and Dimension