

Basbyte

Jun 23, 2026, 13 min read

#linjär-algebra

#vektorum

#bas

1. Problemställningen

| [3B1B: Change of basis](#) ↗

I [V4L3 M0067M](#) såg vi att samma vektor \vec{x} får **olika** koordinatvektorer beroende på vilken bas vi väljer. Det leder till en naturlig fråga:

| Om vi känner koordinaterna för \vec{x} relativt **en** bas — hur beräknar vi koordinaterna relativt en **annan** bas?

Konkret: Givet två baser B och B' för ett **vektorum** V , och koordinatvektorn $[\vec{x}]_B$. Hur hittar vi $[\vec{x}]_{B'}$?

🔗 Varför behövs detta?

Ibland är ett problem svårt att lösa i en viss bas men enkelt i en annan. Basbyte låter oss “byta perspektiv” — lösa problemet i den bekväma basen och sedan översätta tillbaka.

Analogi: Tänk på att byta från kartesiska koordinater till **polära koordinater**. Samma punkt i planet, men olika siffror som beskriver den. Ibland är polära koordinater smidigare (t.ex. för cirklar).

2. Övergångsmatrix – definition

Definition: Övergångsmatrix

Låt $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ och $B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n\}$ vara två baser för ett vektorrum V .

Övergångsmatrisen (transition matrix) från B till B' är den unika $n \times n$ -matris $P_{B \rightarrow B'}$ som uppfyller:

$$[\vec{x}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{x}]_B$$

för alla $\vec{x} \in V$.

Med andra ord: övergångsmatrisen “översätter” koordinater i bas B till koordinater i bas B' genom en enkel matrismultiplikation.

Notationen $P_{B \rightarrow B'}$

Pilen visar **riktningen** på översättningen: från B -koordinater **till** B' -koordinater. Läs det som “övergångsmatrisen **från** B **till** B' “.

Var noga med ordningen – $P_{B \rightarrow B'}$ och $P_{B' \rightarrow B}$ är **inte** samma matris!

3. Hur beräknar man övergångsmatrisen?

3.1 Metod: via kolumner

Övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$ fås genom att uttrycka de **gamla** basvektorerna (B :s vektorer) i den **nya** basens (B' :s) koordinater:

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} [\vec{b}_1]_{B'} & [\vec{b}_2]_{B'} & \cdots & [\vec{b}_n]_{B'} \end{bmatrix}$$

Varför? Om vi sätter $\vec{x} = \vec{b}_j$ (den j :te basvektorn i B), så ger $[\vec{b}_j]_B = \vec{e}_j$ (enhetsvektorn). Då:

$$[\vec{b}_j]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{b}_j]_B = P_{B \rightarrow B'} \vec{e}_j = \text{kolumn } j \text{ i } P_{B \rightarrow B'}$$

🔗 Minnesregel

Kolumn j i $P_{B \rightarrow B'}$ = koordinaterna för den j :te **gamla** (B) basvektorn uttryckt i den **nya** (B') basen.

3.2 Metod i \mathbb{R}^n : radreducering

I \mathbb{R}^n finns en smidig beräkningsmetod. Bilda den utökade matrisen med B' :s vektorer till vänster och B :s vektorer till höger, och radreducera:

$$\left[B' \mid B \right] \xrightarrow{\text{radreducera}} \left[I \mid P_{B \rightarrow B'} \right]$$

Varför fungerar detta? Vi löser n ekvationssystem samtidigt: för varje basvektor \vec{b}_j i B söker vi koefficienter c_1, \dots, c_n sådana att $c_1 \vec{b}'_1 + \dots + c_n \vec{b}'_n = \vec{b}_j$. Dessa koefficienter är precis $[\vec{b}_j]_{B'}$, dvs. kolumn j i $P_{B \rightarrow B'}$.

≡ Räkneexempel: Övergångsmatrix i \mathbb{R}^2 >

≡ Räkneexempel: Övergångsmatrix i \mathbb{R}^3 (möjlig tentauppgift) >

≡ Räkneexempel: Mellan två icke-standardbaser >

4. Egenskaper hos övergångsmatrisen

🔗 Sats: Övergångsmatrisen är inverterbar

Övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$ är alltid **inverterbar**, och dess invers är övergångsmatrisen i **motsatt riktning**:

$$(P_{B \rightarrow B'})^{-1} = P_{B' \rightarrow B}$$

Varför? Vi har: $[\vec{x}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{x}]_B$

Multiplitera båda sidor med $(P_{B \rightarrow B'})^{-1}$: $[\vec{x}]_B = (P_{B \rightarrow B'})^{-1} [\vec{x}]_{B'}$

Men per definition gäller $[\vec{x}]_B = P_{B' \rightarrow B} [\vec{x}]_{B'}$. Alltså $P_{B' \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow B'})^{-1}$. ■

Praktisk konsekvens

Om du har beräknat $P_{B \rightarrow B'}$ behöver du **inte** göra om hela beräkningen för att gå åt andra hållet – invertera matrisen! Och om matrisen är 2×2 kan du använda

formeln $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Sats: Kedja av basbyten

Om B , B' och B'' är tre baser för samma vektorrum, så gäller:

$$P_{B \rightarrow B''} = P_{B' \rightarrow B''} \cdot P_{B \rightarrow B'}$$

Man kan “kedja” övergångsmatriser genom matrismultiplikation.

Intuition: Först översätt från B till B' , sedan från B' till B'' . Sammansättningen ger direkt från B till B'' .

5. Specialfall: basbyte via standardbasen

Om en av baserna är **standardbasen** $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ i \mathbb{R}^n förenklas beräkningarna avsevärt.

5.1 Från bas B till standardbasen

$$P_{B \rightarrow E} = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n]$$

Det vill säga: övergångsmatrisen är helt enkelt matrisen med B :s basvektorer som kolumner!

Varför? I standardbasen är $[\vec{b}_j]_E = \vec{b}_j$ (koordinaterna **är** komponenterna).

5.2 Från standardbasen till bas B

$$P_{E \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow E})^{-1} = [\vec{b}_1 \quad \dots \quad \vec{b}_n]^{-1}$$

5.3 Mellan två baser via standardbasen

Vill du beräkna $P_{B \rightarrow B'}$ kan du gå **via** standardbasen:

$$P_{B \rightarrow B'} = P_{E \rightarrow B'} \cdot P_{B \rightarrow E} = (P_{B' \rightarrow E})^{-1} \cdot P_{B \rightarrow E}$$

☰ Räkneexempel: Via standardbasen >

6. Basbyte i andra vektorrum

Metoden fungerar inte bara i \mathbb{R}^n – den gäller i **alla** ändligtdimensionella vektorrum. Nyckeln är att översätta till \mathbb{R}^n via koordinater.

☰ Basbyte i \mathcal{P}_2 >

7. Beslutsträd

Beräkna övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$

flowchart TD

```
A["Givet: baser B och B' för V"] --> B{"Arbetar vi i R^n?"}
B -- Ja --> C["Bilda [B' | B]\noch radreducera\ntill [I | P]"]
B -- Nej --> D["Översätt B och B'\ntill koordinater i R^n\n(via standardbas)"]
D --> C
C --> E["P = P_{B→B'}"]
E --> F{"Behöver du P_{B'→B}?"}
F -- Ja --> G["P_{B'→B} = P^{-1}"]
F -- Nej --> H["Klar!"]
```

Beräkna $[\vec{x}]_{B'}$ givet $[\vec{x}]_B$

flowchart TD

```
A["Givet:  $[x]_B$  och baserna B, B'"] --> B["Beräkna P_{B→B'}\n(se ovan)"]
B --> C["Matrismultiplicera:\n $[x]_{B'} = P_{B→B'} \cdot [x]_B$ "]
C --> D["Svar:  $[x]_{B'}$ "]
```

8. Övningsuppgifter

Övergångsmatris-uppgifter

[🔗 Uppgift 1: Övergångsmatris i \$\mathbb{R}^2\$ >](#)

[🔗 Uppgift 2: Mellan två icke-standardbaser >](#)

[🔗 Uppgift 3: Basbyte i \$\mathcal{P}_1\$ >](#)

Inversuppgifter

[🔗 Uppgift 4: Omvänd riktning >](#)

Konceptuella uppgifter

🔗 [Uppgift 5: Sant eller falskt? >](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Change of basis \(kap 13\)](#) 🔗 — basbyte visuellt förklarat
- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) 🔗 — grunden för baser och koordinater
- [3Blue1Brown: Eigenvectors and eigenvalues \(kap 14\)](#) 🔗 — egenvärden och basbyte hänger ihop

Wikipedia

- [Change of basis](#) 🔗
- [Transition matrix](#) 🔗
- [Coordinate vector](#) 🔗

Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Change of Basis](#) 🔗
-