Diagonalisering

Jun 23, 2026, 18 min read

#linjär-algebra #egenvärde #matris

1. Likhetsomvandlingar

1.1 Grundidén

Produkter av formen $P^{-1}AP$, där A och P är $n \times n$-matriser och P är inverterbar, är det centrala verktyget i detta kapitel. Omvandlingen

$$A \longrightarrow P^{-1}AP$$

kallas en **likhetsomvandling** (“similarity transformation”). Matrisen A avbildas på matrisen $P^{-1}AP$.

Dessa omvandlingar är viktiga eftersom de **bevarar** många egenskaper hos A.

1.2 Likhetsbeständiga egenskaper

Om $B = P^{-1}AP$ kallas dessa bevarade egenskaper **likhetsbeständiga** (similarity invariants):

Egenskap	Vad som gäller
Determinant	$\det(A) = \det(P^{-1}AP)$
Inverterbarhet	A inverterbar $\iff$ $P^{-1}AP$ inverterbar
Rang	$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(P^{-1}AP)$
Nollitet	$\operatorname{null}(A) = \operatorname{null}(P^{-1}AP)$
Spår	$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP)$

Egenskap	Vad som gäller
Karakteristiskt polynom	A och $P^{-1}AP$ har samma karakteristiska polynom
Egenvärden	A och $P^{-1}AP$ har samma egenvärden
Egenrumsdimension	Om λ är egenvärde har A och $P^{-1}AP$ egenrum med samma dimension för λ

Varför bevaras determinanten? >

2. Likartade matriser och diagonaliserbarhet

Definition: Likartade matriser

Låt A och B vara kvadratiska matriser. Vi säger att B är **likartad med** A ("similar to A") om det finns en inverterbar matris P sådan att

$$B = P^{-1}AP$$

Vi säger då att A och B är **likartade matriser**.

Symmetri >

Definition: Diagonaliserbar matris

En kvadratisk matris A kallas **diagonaliserbar** om den är likartad med någon diagonalmatris D, dvs. om det finns en inverterbar matris P sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal.

Man säger då att P **diagonaliserar** A.

Varför vill vi diagonalisera? En diagonalmatris är enkel att arbeta med — egenvärden, determinant, potenser är alla triviala att beräkna. Om A är diagonaliserbar ärver A all denna enkelhet.

---

3. Sats 5.2.1 — Diagonaliserbarhetskriteriet

Sats 5.2.1: Ekvivalenta villkor

Om A är en $n \times n$-matris, är följande ekvivalenta:

(a) A är diagonaliserbar

(b) A har n linjärt oberoende egenvektorer

Bevisidé ($\Rightarrow$): Anta att $P^{-1}AP = D$, dvs. $AP = PD$. Låt $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ vara kolumnvektorerna i P och $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vara diagonalelementen i D. Då ger $AP = PD$:

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad \text{för alla } i$$

Eftersom P är inverterbar är kolumnerna linjärt oberoende och nollskilda — alltså är de n linjärt oberoende egenvektorer.

Bevisidé ($\Leftarrow$): Anta att A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Bilda $P = [\mathbf{p}_1 \; \mathbf{p}_2 \; \cdots \; \mathbf{p}_n]$. Då är $AP = PD$ och P inverterbar, så $P^{-1}AP = D$.

Nyckelsamband

Om $P = [\mathbf{p}_1 \; \mathbf{p}_2 \; \cdots \; \mathbf{p}_n]$ diagonaliserar A, gäller:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Det i:te diagonalelementet i $P^{-1}AP$ är egenvärdet som svarar mot den i:te kolumnen i P.

---

4. Metod för diagonalisering

Procedur: Diagonalisera en $n \times n$-matris A

Steg 1. Hitta en bas för varje egenrum. Räkna ihop det totala antalet basvektorer.

- Om totalen $= n$ → A är diagonaliserbar.
- Om totalen $< n$ → A är **inte** diagonaliserbar. Stopp.

Steg 2. Bilda $P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ med de n basvektorerna som kolumner (i valfri ordning).

Steg 3. $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris vars i:te diagonalelement är egenvärdet som svarar mot $\mathbf{p}_i$.

Ordningen spelar roll — men bara för D

Ordningen på kolumnerna i P kan väljas fritt. Byter du ordning på egenvektorerna ändras bara ordningen på egenvärden i diagonalmatrisen.

---

5. Räkneexempel – diagonalisering

Exempel 1: Hitta P som diagonaliserar A (diagonaliserbar)

Exempel 2: En matris som inte är diagonaliserbar

Exempel 3: Triangulär matris (diagonaliserbar) >

6. Sats 5.2.2 — Distinkta egenvärden

Sats 5.2.2: Distinkta egenvärden och linjärt oberoende

(a) Om $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ är **distinkta** egenvärden till A, och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ är motsvarande egenvektorer, så är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ **linjärt oberoende**.

(b) En $n \times n$-matris med n distinkta egenvärden är **diagonaliserbar**.

Konversen av (b) är falsk

En matris med **färre** än n distinkta egenvärden kan ändå vara diagonaliserbar! Identitetsmatrisen I_n har bara ett egenvärde ($\lambda = 1$) men är redan diagonal. Satsen ger ett tillräckligt, **ej nödvändigt**, villkor.

7. Algebraisk och geometrisk multiplicitet

Definition: Multipliciteter

Låt λ_0 vara ett egenvärde till en $n \times n$-matris A.

- Den **geometriska multipliciteten** av λ_0 är $\dim(E_{\lambda_0})$ — dimensionen av egenrummet.
- Den **algebraiska multipliciteten** av λ_0 är antalet gånger $(\lambda - \lambda_0)$ uppträder som faktor i det karakteristiska polynomet $\det(\lambda I - A)$.

Intuition: Algebraisk multiplicitet = "hur stark" roten är i det karakteristiska polynomet. Geometrisk multiplicitet = "hur många oberoende riktningar" egenvärdet har.

Exempel: Multipliciteter

Sats 5.2.4: Multiplicitetssatsen

Om A är en kvadratisk matris gäller:

(a) För varje egenvärde är den **geometriska multipliciteten** $\leq$ **algebraiska multipliciteten**.

(b) A är diagonaliserbar om och bara om:

- Det karakteristiska polynomet kan skrivas som en produkt av linjära faktorer, **och**
- Den geometriska multipliciteten är **lika med** den algebraiska multipliciteten för varje egenvärde.

Praktisk konsekvens

Villkor (b) ger ett **fullständigt** kriterium för diagonaliserbarhet — det räcker att kontrollera multipliciteterna utan att leta efter n oberoende egenvektorer direkt.

---

8. Potenser av en matris

8.1 Egenvärden för A^k

Sats 5.2.3: Egenvärden för matrispotenser

Om k är ett positivt heltal, λ är ett egenvärde till A, och $\mathbf{x}$ är en motsvarande egenvektor, så är λ^k ett egenvärde till A^k med samma egenvektor $\mathbf{x}$.

Bevis: $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$. Induktion ger $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.

8.2 Beräkna A^k via diagonalisering

Om A är diagonaliserbar med $P^{-1}AP = D$, gäller:

$$P^{-1}A^kP = D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

vilket ger formeln:

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}$$

Varför är detta effektivt?

Att upphöja en diagonalmatris till k:te potensen är trivialt — bara upphöj varje diagonalelement. Arbetet ligger i att diagonalisera A **en gång**, sedan kan A^k beräknas för **valfritt** k.

Exempel 4: Beräkna A^{13} >

---

9. Tillvägagångssätt — sammanfattning

Metod: Avgöra om A är diagonaliserbar

Steg 1. Hitta egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ och deras **algebraiska multipliciteter** från $\det(\lambda I - A) = 0$.

Steg 2. För varje egenvärde: beräkna $\dim(E_\lambda) = \text{nullitet}(\lambda I - A)$ — den **geometriska multipliciteten**.

Steg 3. Kontroll:

- Om geo mult = alg mult för **alla** egenvärden → diagonaliserbar ✓
- Om geo mult < alg mult för **något** egenvärde → **ej** diagonaliserbar ✗

Steg 4. (Om diagonaliserbar) Bilda P med basvektorerna för alla egenrum som kolumner.

---

10. Övningsuppgifter (V5L3)

Beräkningsuppgifter

Uppgift 1: Hitta P som diagonaliserar (2×2)

Uppgift 2: Hitta P som diagonaliserar (3×3)

Uppgift 3: Avgör diagonaliserbarhet

Uppgift 4: Beräkna A^{10} via diagonalisering

Konceptuella uppgifter

Uppgift 5: Sant eller falskt?

---

11. Repetition: diagonaliserbarhetskriteriet

En $n \times n$-matris A är **diagonaliserbar** om och bara om geometrisk multiplicitet = algebraisk multiplicitet för **varje** egenvärde.

♨ **Sammanfattning av metoden**

Steg 1. Hitta egenvärdena och deras algebraiska multipliciteter från $\det(\lambda I - A) = 0$.

Steg 2. För varje egenvärde λ: beräkna $\dim(E_\lambda) = \text{nullitet}(\lambda I - A)$ – den geometriska multipliciteten.

Steg 3. Kontroll:

- geo mult = alg mult för **alla** egenvärden → diagonaliserbar ✓
- geo mult < alg mult för **något** egenvärde → **ej** diagonaliserbar ✗

Steg 4. (Om diagonaliserbar) Bilda P med basvektorerna för alla egenrum som kolumner, och $P^{-1}AP = D$

11.1 Nyckelsamband: $AP = PD$

Relationen $P^{-1}AP = D$ är ekvivalent med:

$$\boxed{AP = PD}$$

Det är ofta enklare att verifiera $AP = PD$ direkt utan att beräkna P^{-1}.

♨ **Kontrollera med spår och determinant**

Summan av egenvärdena (med multiplicitet) ska vara lika med $\text{tr}(A)$, och produkten ska vara lika med $\det(A)$:

$$\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A), \qquad \prod_i \lambda_i = \det(A)$$

Dessa är snabba kontroller — om de inte stämmer har du räknat fel.

12. Praktiska riktlinjer

Tre frågor att ställa sig

1. **Triangulär matris?** → Egenvärden avläses direkt från diagonalen. Gausselimination behövs inte för att hitta egenvärden.
2. n **distinkta egenvärden?** → Direkt diagonaliserbar (Sats 5.2.2). Geometrisk multiplicitet måste vara 1 för varje enkel rot.
3. **Upprepat egenvärde?** → Beräkna $\dim(E_\lambda)$ (antalet fria parametrar vid Gausselimination av $\lambda I - A$). Om dim $=$ algebraisk multiplicitet → ok.

Börja inte Gausselimination för tidigt

Vid ett 3×3-system med ett dubbelt egenvärde: räkna **antalet fria variabler** i $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ – det ger direkt den geometriska multipliciteten. Behöver du bara veta **om** matrisen är diagonaliserbar räcker det att konstatera antalet fria parametrar.

Exempel: 3×3 med ett dubbelt egenvärde >

---

13. Symmetriska matriser

Definition: Symmetrisk matris

En matris A kallas **symmetrisk** om $A = A^T$.

13.1 Spektralsatsen

Spektralsatsen (Sats 7.1.1)

Om A är en **symmetrisk** $n \times n$-matris gäller:

(a) Alla egenvärden till A är **reella**.

(b) Egenvektorer som hör till **olika** egenvärden är **ortogonala**.

(c) A är **alltid diagonaliserbar** — det finns alltid n linjärt oberoende egenvektorer.

(d) Det finns dessutom en **ortogonal** matris P (dvs. $P^{-1} = P^T$) sådan att $P^T AP = D$

Man säger att A är **ortogonalt diagonaliserbar**.

Konsekvens: För symmetriska matriser behöver man aldrig kontrollera multiplicitetskravet — diagonaliserbarhet är garanterad.

Ortogonal matris P

En matris P är ortogonal om kolumnerna bildar en **ortonormal** bas. Eftersom egenvektorer till olika egenvärden automatiskt är ortogonala, räcker det att normalisera varje egenvektor:

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_i|}$$

(Inom ett egenrum med dim > 1 krävs dessutom Gram–Schmidt om egenvektorerna inte redan är ortogonala.)

Exempel: Symmetrisk matris

14. Jämförelse: vanlig vs. ortogonal diagonalisering

Egenskap	Allmän matris	Symmetrisk matris
Alltid diagonaliserbar?	Nej	**Ja**
Egenvärden reella?	Inte nödvändigt	**Alltid**
Egenvektorer ortogonala?	Inte nödvändigt	**Ja** (olika egenvärden)
P kan väljas ortogonal?	Nej	**Ja** ($P^{-1} = P^T$)
Formel	$P^{-1}AP = D$	$P^TAP = D$

---

15. Övningsuppgifter (V5L4)

Uppgift 1: Kontrollera diagonaliserbarhet utan att räkna egenvektorer

Uppgift 2: Ortogonal diagonalisering av symmetrisk matris

Uppgift 3: Verifiera $AP = PD$

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Eigenvectors and eigenvalues (kap 14) — visuell grund
- MIT 18.06SC: Diagonalization (Gilbert Strang) — fullständig genomgång av diagonalisering
- MIT 18.06SC: Symmetric Matrices and Positive Definiteness (Gilbert Strang) — symmetriska matriser och spektralsatsen

Interaktiva verktyg

- matrixcalc.org — beräkna egenvärden, egenvektorer, $P^{-1}AP$ online

Wikipedia

- Diagonalizable matrix
- Matrix similarity
- Eigendecomposition of a matrix
- Symmetric matrix
- Spectral theorem

Fördjupning

- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Diagonalization
- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Orthogonal Diagonalization
- Immersive Linear Algebra — Chapter 6