

Differentialekvationer

Jun 23, 2026, 46 min read

#envariabelanalys

#differentialekvation

Inledning

Det finns **ordinära differentialekvationer** (ODE) och **partiella differentialekvationer** (PDE). I kursen M0066M behandlas endast ODE eftersom partiella har fler variabler, och detta är en envariabelkurs.

En ODE är en ekvation som innehåller en okänd funktion och derivator av denna funktion. Ett exempel från boken: $xy'''(x) - 3\sqrt{xy'''(x)} + y'(x) + (\ln x)y(x) = 5e^{2x}$

[✎ Vad är en linjär ODE? >](#)

[✎ Vad är en homogen ODE? >](#)

[✎ Ordning och grad | >](#)

Del I: Första ordningens ODE

Separerbara differentialekvationer

[📄 Definition: Separabel differentialekvation >](#)

[📄 SATS: Lösning av separerbara differentialekvationer >](#)

[📖 Receptbok: Separerbara ODE >](#)

[📄 SATS: Omformning till separabel >](#)

[⚠️ Vanliga misstag med separerbara ODE >](#)

Homogena differentialekvationer (substitution $y = vx$)

[📄 Definition: Homogen differentialekvation \(av första ordningen\) >](#)

[📖 Receptbok: Homogena ODE med substitution \$y = vx\$ >](#)

[✓ Härlledning: Varför fungerar substitutionen? >](#)

[☰ Exempel: \$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\$ >](#)

[☰ Exempel: \$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}, x > 0\$ >](#)

[☰ Exempel: \$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, x > 0\$ >](#)

[☰ Exempel med begynnelsevillkor: \$y' = \frac{y^2-x^2}{xy}, y\(1\) = 2\$ >](#)

 [Vanliga misstag >](#)

Linjära första ordningens ODE

 [Definition: Linjär första ordningens ODE >](#)

 [Receptbok: Linjära 1:a ordningens ODE \(integrerande faktor\) >](#)

 [Vanliga misstag >](#)

Bernoullis ekvation

 [Definition: Bernoullis ekvation >](#)

 [Receptbok: Bernoullis ekvation >](#)

Riktningsfält och numeriska metoder

 [Riktningsfält >](#)

 [Isoklinmetoden >](#)

 [Receptbok: Eulers metod >](#)


 [Förbättrade metoder \(överkurs\) >](#)

Del II: Teori för linjära ODE av högre ordning

Grundläggande teori

 [Allmän form för linjär ODE av ordning \$n\$ >](#)

 [SATS: Superpositionsprincipen >](#)

 [SATS: Linjärt oberoende och beroende >](#)

 [SATS: Dimension av Lösningsrummet >](#)

 [SATS: Struktur för inhomogen ODE >](#)

 [Wronskianen \(ej obligatorisk i M0066M\) >](#)

Del III: Andra ordningens ODE

Homogena ODE med konstanta koefficienter

Vi löser ODE:n $y'' + ay' + by = 0$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

[✎ Bakgrund: Diskriminanten >](#)

[🔗 Receptbok: 2:a ordningens homogen ODE med konstanta koefficienter >](#)

[✓ Härlledning: Ansats och karakteristisk ekvation >](#)

[✓ Härlledning: Fall 1 \(\$D > 0\$ \) – Två olika reella rötter >](#)

[✓ Härlledning: Fall 2 \(\$D < 0\$ \) – Komplexa konjugerade rötter >](#)

[✓ Härlledning: Fall 3 \(\$D = 0\$ \) – Dubbelrot >](#)

[✎ Fysikalisk tolkning \(komplexa rötter\) >](#)

Räkneexempel: Homogena ODE

[☰ Exempel: \$y'' - y' - 2y = 0\$ >](#)

[☰ Exempel: \$y'' + 4y' + 5y = 0\$ >](#)

[☰ Exempel: \$y'' + 4y = 0\$ >](#)

☰ Exempel: $y'' + 6y' + 9y = 0$ >

☰ Exempel med IVP: $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1$ >

☰ Exempel med IVP: $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2$ >

Inhomogena ODE med konstanta koefficienter

Vi löser ekvationer av typen: $y'' + ay' + by = f(x)$ där $f(x) \neq 0$.

📍 SATS: Allmän lösning till inhomogen ODE >

Metod 1: Obestämda koefficienter

📍 När fungerar ansatsmetoden? >

📖 Receptbok: Obestämda koefficienter >

☰ Exempel: $y'' + 3y' + 2y = 10e^{4x}$ >

☰ Exempel: $y'' - 4y = e^{2x}$ (RESONANS!) >

☰ Exempel: $y'' + 4y = \cos(2x)$ (RESONANS med trig!) >

☰ Exempel: $y'' + y' - 2y = x^2$ >

☰ Exempel: $y'' - 2y' + y = e^x$ (DUBBELROT + RESONANS!) >

Metod 2: Variation av parametrar

📄 När används variation av parametrar? >

📖 Receptbok: Variation av parametrar >

☰ Exempel: $y'' + y = \tan x$ >

☰ Exempel: $y'' + 4y = \sec(2x)$ >

⚠ Jämförelse av metoderna >

Reduktion av ordning

📄 När används reduktion av ordning? >

📖 Receptbok: Reduktion av ordning (typ 1 – saknar y) >

📖 Receptbok: Reduktion av ordning (typ 2 – känd lösning) >

Eulers differentialekvation (Cauchy-Euler)

[📄 Definition: Eulers differentialekvation >](#)

[📖 Receptbok: Eulers differentialekvation >](#)

[✓ Härlledning: Dubbelrotsfallet >](#)

[✓ Härlledning: Komplexa rötter >](#)

[☰ Exempel: \$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0, x > 0\$ >](#)

[☰ Exempel: \$x^2y'' + xy' + y = 0, x > 0\$ >](#)

[☰ Exempel: \$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, x > 0\$ >](#)

[☰ Exempel: \$x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, x > 0\$ >](#)

[⚠ OBS: Definitionsområde >](#)

Del IV: Högre ordningens ODE

ODE av ordning n med konstanta koefficienter

[📄 Allmän form >](#)

De fyra fallen för rötter

[📄 SATS: Lösningar från karakteristiska ekvationens rötter >](#)

✓ [Härledning: Fall 1 – Enkel reell rot >](#)

✓ [Härledning: Fall 2 – Enkelt komplext rotpar >](#)

✓ [Härledning: Fall 3 – Reell rot med multiplicitet \$m\$ >](#)

✓ [Härledning: Fall 4 – Komplex rotpar med multiplicitet \$m\$ >](#)

[📖 Receptbok: Högre ordningens ODE >](#)

Räkneexempel: Homogena ODE av högre ordning

☰ [Exempel 1: \$y''' - y'' - y' + y = 0\$ >](#)

☰ [Exempel 2: \$y''' - y'' - y' + y = e^x\$ \(inhomogen\) >](#)

☰ [Exempel 3: \$y^{\(4\)} + 2y'' + y = 0\$ >](#)

☰ [Exempel 4: \$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-3x}\$ >](#)

☰ [Exempel 5: \$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0\$ >](#)

☰ Exempel 6: $y^{(4)} - y = 0$ >

☰ Exempel 7: $y''' + y'' - y' - y = 0$ >

☰ Exempel 8: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ >

Eulers differentialekvation (Cauchy-Euler)

📄 Definition: Eulers differentialekvation >

📖 Receptbok: Eulers differentialekvation via substitution >

✓ Härlledning: Transformationsformler för derivator >

☰ Exempel 9: $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32 \ln x, x > 0$ >

☰ Exempel: $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0, x > 0$ (kontroll exempel) >

🔗 Jämförelse: Substitution vs direktansats >

⚠️ OBS: Definitionsområde >

Del V: Tillämpningar

Befolkningsmodeller

[Exponentiell tillväxt och avtagande >](#)

[Receptbok: Exponentiell tillväxt/sönderfall >](#)

[Logistisk tillväxt >](#)

Newtons avsvalningslag

[Receptbok: Newtons avsvalningslag >](#)

Mekaniska svängningar

[Fjäder-massa-system >](#)

[Receptbok: Fria svängningar >](#)

[Resonans >](#)

Elektriska kretsar

[RLC-kretsar >](#)

Läsning

- Chapter 19 Ordinary Differential Equations
-