

Dimension

Jun 23, 2026, 13 min read

#linjär-algebra

#vektorrum

1. Alla baser har lika många vektorer

I V4L3 M0067M definierade vi begreppet bas — en linjärt oberoende mängd som spänner upp rummet. En naturlig fråga uppstår: kan olika baser för samma rum ha **olika** antal vektorer?

Svaret är nej. Detta är ett av de mest fundamentala resultaten i linjär algebra.

 **Sats: Alla baser har samma storlek**

Låt V vara ett vektorrum. Om V har en bas med n vektorer, så har **varje** bas för V exakt n vektorer.

Bevisidé: Antag att $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ och $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ båda är baser för V .

- Eftersom B är en bas (spänner upp V) och C är linjärt oberoende, måste $m \leq n$ (fler oberoende vektorer än basvektorer kan inte finnas).
- Eftersom C är en bas (spänner upp V) och B är linjärt oberoende, måste $n \leq m$.
- Alltså $m = n$. ■

 **Varför är detta viktigt?**

Det betyder att antalet basvektorer är en **egenskap hos rummet**, inte hos den specifika basen vi råkar välja. Detta antal förtjänar ett eget namn — **dimensionen**.

2. Definition av dimension

Definition: Dimension

Låt V vara ett vektorrum.

- Om V har en bas med n vektorer kallas V **ändligtdimensionellt** och vi skriver $\dim(V) = n$.
- Om $V = \{\vec{0}\}$ (bara nollvektorn) definierar vi $\dim(V) = 0$.
- Om V inte kan spännas upp av ett ändligt antal vektorer kallas V **oändligtdimensionellt**.

Med andra ord: dimensionen av ett vektorrum V är **antalet vektorer i en (vilken som helst) bas** för V .

3. Dimensioner för vanliga vektorrum

Vektorrum	Standardbas	Dimension
\mathbb{R}^n	$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$	$\dim(\mathbb{R}^n) = n$
\mathcal{P}_n (polynom grad $\leq n$)	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$	$\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$
$M_{m \times n}$ (alla $m \times n$ -matriser)	Matriser med en etta, resten nollor	$\dim(M_{m \times n}) = m \cdot n$
$\{\vec{0}\}$	\emptyset (tom mängd)	$\dim = 0$

[☰ Verifiering av dimensioner >](#)

⚠ \mathcal{P}_n har dimension $n + 1$, inte n !

Många gör misstaget att tro att $\dim(\mathcal{P}_n) = n$. Men polynomrummet \mathcal{P}_n innehåller polynom av grad $\leq n$, och basen $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ har $n + 1$ **element** (glöm inte konstanttermen!).

☰ [Oändligtdimensionella rum](#) >

4. Centrala satser om dimension

Dimensionen ger oss kraftfulla verktyg för att snabbt avgöra frågor om linjärt oberoende och span.

4.1 Dimensionsbegränsningar

✎ **Sats: Övre gräns för oberoende**

Om $\dim(V) = n$, så kan **högst** n vektorer i V vara linjärt oberoende.

Ekvivalent: varje mängd med **fler än** n vektorer i V är automatiskt linjärt beroende.

✎ **Sats: Undre gräns för uppspanning**

Om $\dim(V) = n$, så krävs **minst** n vektorer för att spänna upp V .

Ekvivalent: varje mängd med **färre än** n vektorer kan **inte** spänna upp V .

☰ [Snabbslutsatser med dimension](#) >

4.2 Genvägen: rätt antal vektorer

✎ **Sats: n vektorer i ett n -dimensionellt rum**

Låt $\dim(V) = n$ och låt $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en mängd med **exakt** n vektorer i V . Då gäller:

S är linjärt oberoende $\iff S$ spänner upp $V \iff S$ är en bas för V

Det räcker alltså att kontrollera **ett** av villkoren – det andra följer automatiskt!

Varför? Om vi har exakt n vektorer i ett n -dimensionellt rum:

- Om de är oberoende: vi har n oberoende vektorer, och det maximala antalet oberoende vektorer är n (basens storlek). Att lägga till fler gör dem beroende, så de måste redan spänna upp.
- Om de spänner upp: vi har n vektorer som spänner upp, och det minimala antalet som spänner upp är n . Om de vore beroende kunde vi ta bort en och fortfarande spänna upp med $n - 1$ vektorer – men $n - 1 < n$ vektorer kan aldrig spänna upp. Motsägelse!

Praktisk nytta

Denna sats halverar arbetet! Om du vet dimensionen av rummet och har rätt antal vektorer behöver du bara kontrollera **ett** av:

- Linjärt oberoende (radreducera, kolla pivoter i varje **kolumn**)
- Spänner upp (radreducera, kolla pivoter i varje **rad**)

4.3 Plus/minus-satsen

Plus/minus-satsen

Låt V vara ett vektorrum med $\dim(V) = n$.

Plus: Om S är en linjärt oberoende mängd i V som **inte** spänner upp V , så finns en vektor $\vec{v} \in V$ sådan att $S \cup \{\vec{v}\}$ fortfarande är linjärt oberoende.

Minus: Om S spänner upp V men **inte** är linjärt oberoende, så finns en vektor i S som kan tas bort utan att minska spannet.

Intuition: Du kan alltid “bygga upp” till en bas genom att lägga till vektorer (plus), eller “trimma ner” till en bas genom att ta bort överflödiga vektorer (minus).

☰ [Bygg upp till en bas](#) >

☰ [Trimma ner till en bas](#) >

5. Dimension av delrum

✍ **Sats: Dimensionsats för delrum**

Låt W vara ett delrum till ett ändligtdimensionellt vektorrum V . Då gäller:

1. W är ändligtdimensionellt
2. $\dim(W) \leq \dim(V)$
3. $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

Tolkning:

- Ett delrum kan aldrig ha **högre** dimension än det omgivande rummet.
- Det **enda** delrummet med samma dimension som V är V självt.

☰ [Delrum till \$\mathbb{R}^3\$](#) >

☰ [Bestäm dimensionen av ett delrum \(möjlig tentauppgift\)](#) >

6. Sammanfattning: dimensionsverktyg

Situation	Slutsats
$\dim(V) = n$ och du har $> n$ vektorer	Automatiskt linjärt beroende
$\dim(V) = n$ och du har $< n$ vektorer	Kan inte spänna upp V
$\dim(V) = n$ och du har exakt n vektorer	Oberoende \iff spänner upp \iff bas
W delrum till V	$\dim(W) \leq \dim(V)$
W delrum till V med $\dim(W) = \dim(V)$	$W = V$

7. Beslutsträd

Bestäm dimensionen av ett delrum/span

flowchart TD

```
A["Givet:  $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ "] --> B["Skriv vektorerna som kolumner"]
B --> C["Radreducera till ntrappstegsform"]
C --> D["Räkna antalet pivoter"]
D --> E[" $\dim(W) =$  antal pivoter"]
E --> F{"Behöver du en bas?"}
F -- Ja --> G["Välj de ursprungliga vektorer som motsvarar pivotkolumner"]
F -- Nej --> H["Klar!"]
```

Är mängden en bas? (med dimension)

flowchart TD

```
A["Givet:  $\{v_1, \dots, v_p\}$  i  $V$  med  $\dim(V) = n$ "] --> B{" $p = n$ ?"}
B -- " $p < n$ " --> N01["INTE EN BAS\nFör få vektorer – kan inte spänna upp"]
B -- " $p > n$ " --> N02["INTE EN BAS\nFör många vektorer – automatiskt beroende"]
B -- " $p = n$ " --> C["Kontrollera ETT av:\n• Linjärt oberoende\n• Spänner upp"]
C --> D{"Villkoret nuppfyllt?"}
```

```
D -- Ja --> YES["BAS ✓\n(det andra villkoret\nföljer automatiskt)"]  
D -- Nej --> N03["INTE EN BAS"]
```

8. Övningsuppgifter

Dimensionsuppgifter

[? Uppgift 1: Ange dimensionen >](#)

[? Uppgift 2: Dimension av delrum >](#)

[? Uppgift 3: Dimension av polynomdelrum >](#)

Basuppgifter med dimension

[? Uppgift 4: Bas för \$\mathbb{R}^4\$? >](#)

[? Uppgift 5: Komplettera till bas >](#)

Konceptuella uppgifter

[? Uppgift 6: Sant eller falskt? >](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) — dimension som antal basvektorer
- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces \(kap 16\)](#) — dimension i abstrakta vektorrum
- [3Blue1Brown: Nonsquare matrices as transformations between dimensions \(kap 8\)](#) — olika dimensioner och transformationer

Wikipedia

- [Dimension \(vector space\)](#)
- [Basis \(linear algebra\)](#)

Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Basis and Dimension](#)
-