

Dubbelintegraler

Jun 23, 2026, 3 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#integration

#dubbelintegral

Kurs: M0068M Förkunskaper: Bestämd integral och Riemannsummor, Integraler

1. Definition via Riemannsummor

Låt $f(x, y)$ vara definierad på ett slutet, begränsat område $D \subset \mathbb{R}^2$. Dela upp D i n delområden ΔA_k med valda punkter (x_k^*, y_k^*) .

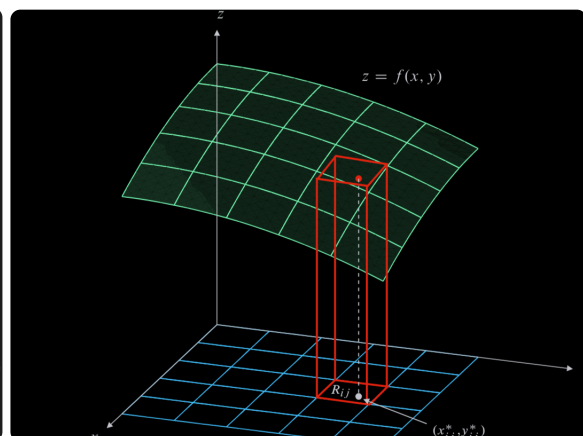
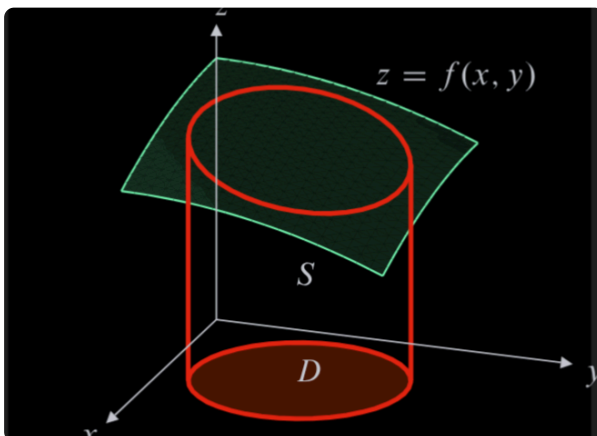
Volymelement kan beskrivas som funktionen \times arean, och ΔA kan beskrivas som $\Delta x \Delta y$

$$\Delta V = f(x, y) \Delta A = f(x, y) \Delta x \Delta y$$

Totala volymen kan beskrivas som en summa av dessa volymelement ΔV

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

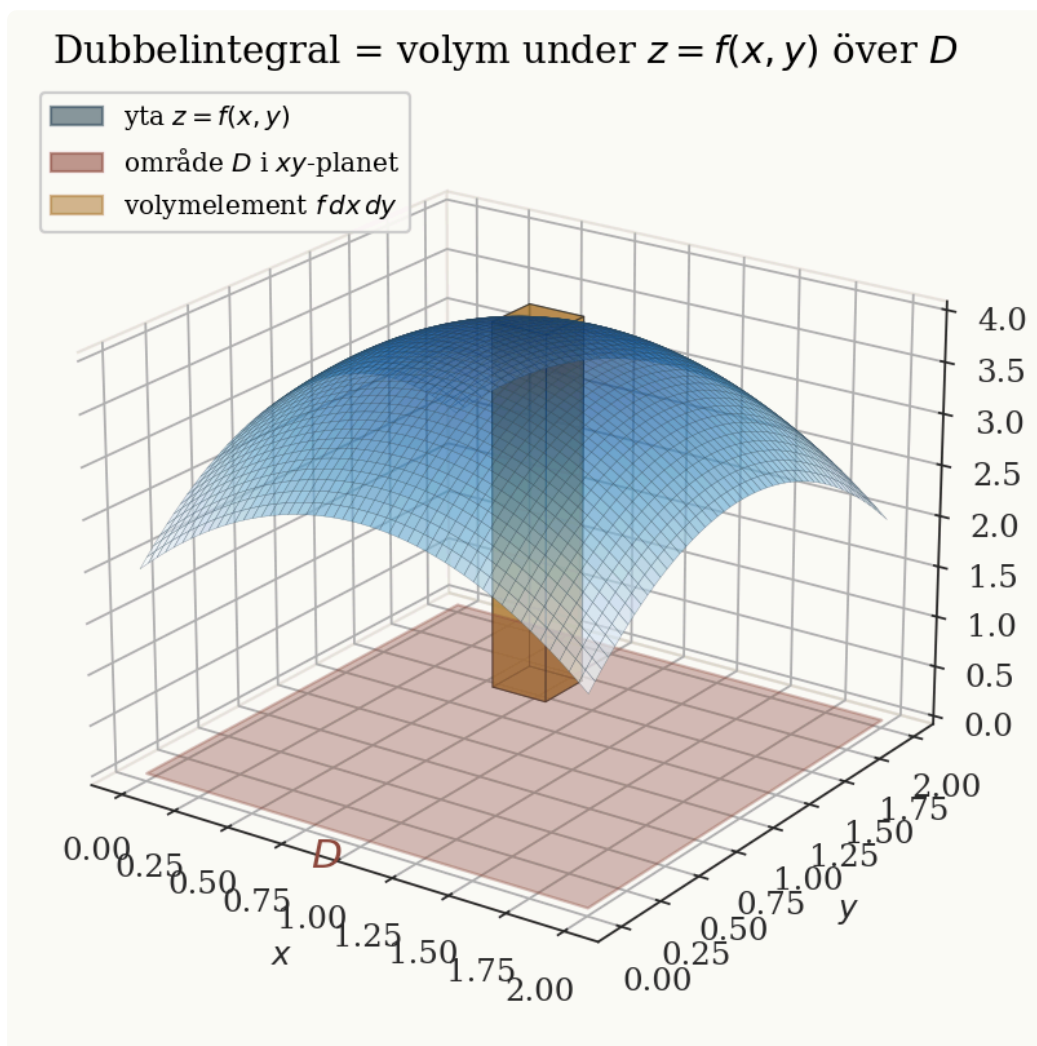
Exempel: för kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ kan vi dela i fyra delkvadrater med centrum i punkterna nedan och summera f över dem.



2. Geometrisk tolkning

Tolkning

Om $f(x, y) \geq 0$ på D är $\iint_D f(x, y) dA$ volymen av kroppen mellan området D i xy -planet och ytan $z = f(x, y)$.



Specialfallet $f \equiv 1$ ger arean av D :

$$\iint_D 1 dA = \text{area}(D)$$

3. Itererade integraler (Fubinis sats)

Över ett rektangulärt område $R = [a, b] \times [c, d]$ gäller:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

🔗 x-enkelt vs y-enkelt område

- **y-enkelt:** $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
 $\iint_D f dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$
- **x-enkelt:** $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$
 $\iint_D f dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$

Välj integrationsordning efter hur D är enklast att beskriva.

4. Räkner regler

- Linjäritet: $\iint_D (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_D f dA + \beta \iint_D g dA$
- Additivitet över område: om $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2$ har area noll,
 $\iint_D f dA = \iint_{D_1} f dA + \iint_{D_2} f dA$
- Monotoni: $f \leq g$ på $D \Rightarrow \iint_D f dA \leq \iint_D g dA$
- **Symmetri:** om D är symmetriskt kring x -axeln och f är udda i y , är $\iint_D f dA = 0$. Analogt för udda i x .

5. Exempel

☰ [Exempel 1 - symmetri över enhetsskivan >](#)

☰ [Exempel 2 - y-enkelt område >](#)

☰ [Exempel 3](#) | >

☰ [Exempel 4](#) | >

☰ [Exempel 5 - Polära koordinater](#) >

6. Typiska användningar

- Volym under en yta
- Area av områden i planet
- Masscentrum och moment för plattor
- [Polära koordinater](#) när D är cirkulärt
- Sannolikhetstäthet i två variabler

Läsning

- [15.1 Double Integrals](#)
- [15.2 Iteration of Double Integrals](#)

Se även

- [Bestämd integral och Riemannsummor](#)
- [Variabelbyte i dubbelintegraler](#)
- [Trippelintegraler](#)
- [Integraler](#)

Resurser

- Adams & Essex, *Calculus*, kap. 15.1–15.3
-

