

# Eigenvärden och egenvektorer

Jun 23, 2026, 13 min read

#linjär-algebra

#eigenvärde

#matris

## 1. Definition av eigenvärde och egenvektor

[3B1B: Eigenvectors and eigenvalues](#)

### 1.1 Grundidén

När vi multiplicerar en vektor  $\vec{x}$  med en matris  $A$  ändras i allmänhet **både riktning och längd**. Men ibland finns speciella vektorer vars **riktning bevaras** – de bara skalas. Dessa är egenvektorerna.

#### Definition: Eigenvärde och egenvektor

Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris. En **nollskild** vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  kallas en **egenvektor** till  $A$  om

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

för någon skalär  $\lambda$ . Skalären  $\lambda$  kallas ett **eigenvärde** till  $A$ , och  $\vec{x}$  sägs vara en egenvektor **motsvarande**  $\lambda$ .

**Intuition:** Att multiplicera med  $A$  gör i allmänhet en komplicerad transformation – rotation, skjuvning, skalning i olika riktningar. Men längs egenvektorerna gör  $A$  bara en enkel skalning med faktorn  $\lambda$ .

 **Nollvektorn är aldrig en egenvektor**

Kravet  $\vec{x} \neq \vec{0}$  är viktigt! Annars vore  $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$  uppfyllt för **alla**  $A$  och **alla**  $\lambda$ , vilket ger meningslös information.

Däremot kan  $\lambda = 0$  vara ett egenvärde – det betyder att  $A\vec{x} = \vec{0}$  har en nontrivial lösning, dvs.  $A$  är singulär.

## 1.2 Geometrisk tolkning

Beroende på tecknet och storleken på  $\lambda$  sker olika saker med egenvektorn:

Värde på $\lambda$	Effekt på $\vec{x}$
$\lambda > 1$	Sträcks (samma riktning)
$0 < \lambda < 1$	Krymps (samma riktning)
$\lambda = 1$	Oförändrad ( $A\vec{x} = \vec{x}$ )
$\lambda = 0$	Skickas till $\vec{0}$
$-1 < \lambda < 0$	Krymps och byter riktning
$\lambda < -1$	Sträcks och byter riktning
$\lambda = -1$	Byter riktning, samma längd

☰ [Exempel 1: Verifiera en egenvektor >](#)

☰ [Exempel 2: Geometrisk egenvektorer >](#)

## 2. Beräkna egenvärden: den karakteristiska ekvationen

## 2.1 Härledning

Vi söker  $\lambda$  och  $\vec{x} \neq \vec{0}$  sådana att  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . Skriv om:

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \implies A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0} \implies (\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

För att detta ska ha en **nontrivial** lösning ( $\vec{x} \neq \vec{0}$ ) krävs att matrisen  $\lambda I - A$  är **singulär**:

### Sats 5.1.1: Karakteristisk ekvation

$\lambda$  är ett egenvärde till  $A$  om och bara om

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Detta kallas den **karakteristiska ekvationen** för  $A$ .

**Varför  $\lambda I - A$  och inte  $A - \lambda I$ ?** Båda fungerar!  $\det(\lambda I - A) = 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0$  (de skiljer sig bara med ett tecken  $(-1)^n$ , som inte påverkar nollställena). Boken använder  $\lambda I - A$  för att det karakteristiska polynomet ska ha positivt ledande koefficient.

---

## 2.2 Det karakteristiska polynomet

### Definition: Karakteristiskt polynom

Det **karakteristiska polynomet** för en  $n \times n$ -matris  $A$  är

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Det är ett polynom av grad  $n$  i  $\lambda$ , med ledande term  $\lambda^n$ .

Egenvärdena till  $A$  är **rötterna** till  $p(\lambda) = 0$ .

Eftersom ett polynom av grad  $n$  har högst  $n$  rötter, har en  $n \times n$ -matris **högst  $n$  egenvärden**.

---

## 2.3 Räkneexempel

☰ [Exempel 3: Egenvärden för  \$2 \times 2\$ -matris](#) >

☰ [Exempel 4: Egenvärden för  \$3 \times 3\$ -matris](#) >

### 🔥 Strategi: Hitta rötter till karakteristiska polynomet

1. **Faktorisera direkt** om det är uppenbart
2. **Testa heltalsdivisorer** till konstanttermen (rationella rotsatsen)
3. **Polynomdividera** bort kända rötter för att reducera graden
4. **Andragradsformeln** för de återstående faktorerna
5.  **$2 \times 2$ -trick:**  $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$  (se övning 28 i boken)

---

## 3. Triangulära matriser – egenvärden direkt

### ✍ Sats 5.1.2: Egenvärden för triangulära matriser

Om  $A$  är en **triangulär matris** (övertriangulär, undertriangulär eller diagonal), så är egenvärdena **diagonalelementen**.

**Varför?** Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

☰ [Exempel 5: Egenvärden för triangulär matris](#) >

---

## 4. Hitta egenvektorer och egenrum

## 4.1 Metod

När vi har hittat ett egetvärde  $\lambda$  finner vi motsvarande egenvektorer genom att lösa det homogena systemet:

$$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

### Definition: Egenrum

**Egenrummet** (eigenspace) motsvarande egetvärdet  $\lambda$  är lösningsrummet till  $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ :

$$E_\lambda = \text{null}(\lambda I - A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Egenrummet är ett **delrum** av  $\mathbb{R}^n$ . Egenvektorerna till  $\lambda$  är de **nollskilda** vektorerna i  $E_\lambda$ .

**Koppling till V5L1:** Egenrummet  $E_\lambda$  är precis **nollrummet** för matrisen  $\lambda I - A$ . Vi vet redan hur man hittar baser för **nollrum** – radreducera och identifiera fria variabler!

## 4.2 Räkneexempel

 **Exempel 6: Egenrum för  $2 \times 2$ -matris** >

 **Exempel 7: Egenrum för  $3 \times 3$ -matris (flerdimensionellt egenrum)** >

## 5. Tillvägagångssätt – sammanfattning

### Metod: Hitta egetvärden och egenvektorer

**Steg 1:** Beräkna det karakteristiska polynomet  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ .

**Steg 2:** Lös  $p(\lambda) = 0$  för att hitta egenvärdena.

**Steg 3:** För varje egenvärde  $\lambda_k$ , lös  $(\lambda_k I - A)\vec{x} = \vec{0}$  (radreducera!) för att hitta en bas för egenrummet  $E_{\lambda_k}$ .

## 6. Egenvärden och inverterbarhet

### Sats 5.1.4: Egenvärden och inverterbarhet

En kvadratisk matris  $A$  är **inverterbar** om och bara om  $\lambda = 0$  **inte** är ett egenvärde till  $A$ .

**Varför?**  $\lambda = 0$  är ett egenvärde  $\iff \det(0 \cdot I - A) = 0 \iff \det(-A) = 0 \iff \det(A) = 0 \iff A$  ej inverterbar.

**Alternativ förklaring:**  $\lambda = 0$  egenvärde betyder att  $A\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$  har en nontrivial lösning, dvs.  $\text{null}(A) \neq \{\vec{0}\}$ , dvs.  $A$  är singular.

## 7. $2 \times 2$ -trick: snabbformel

### Snabbformel för $2 \times 2$ -matris

Om  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , så är det karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{tr}(A)}\lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{\text{det}(A)}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \text{det}(A)$$

Egenvärdena fås direkt med andragsformeln:

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$$

☰ Exempel: Snabbformeln >

- summa av egenvärden = spåret. Kontroll
- Produkt av egenvärdena blir determinanten

## 8. Ekvivalenssatsen – utökning

Vi kan nu lägga till ett nytt villkor till den stora ekvivalenssatsen (jfr [V5L1 M0067M](#)):

 Sats 5.1.5: Ekvivalenta villkor (utökning)

Om  $A$  är en  $n \times n$ -matris, så är följande ekvivalenta:

(a)  $A$  är inverterbar (b)  $A\vec{x} = \vec{0}$  har bara triviala lösningen (c)  $A$  kan radreduceras till  $I_n$  (d)  $A$  är en produkt av [elementärmatriser](#) (e)  $A\vec{x} = \vec{b}$  är konsistent för alla  $\vec{b}$  (f)  $A\vec{x} = \vec{b}$  har exakt en lösning för alla  $\vec{b}$  (g)  $\det(A) \neq 0$  (h) Kolumnerna i  $A$  är [linjärt oberoende](#) (i) Raderna i  $A$  är linjärt oberoende (j) Kolumnerna spänner upp  $\mathbb{R}^n$  (k) Raderna spänner upp  $\mathbb{R}^n$  (l) Kolumnerna bildar en bas för  $\mathbb{R}^n$  (m) Raderna bildar en bas för  $\mathbb{R}^n$  (n)  $\operatorname{rang}(A) = n$  (o)  $\operatorname{null}(A) = \{\vec{0}\}$  (p)  $\lambda = 0$  är inte ett egenvärde till  $A \leftarrow$  NYTT

## 9. Övningsuppgifter

### Beräkningsuppgifter

🕒 Uppgift 1: Egenvärden och egenvektorer (2 × 2) >

🔗 Uppgift 2: Egenvärden och egenvektorer ( $3 \times 3$ ) >

🔗 Uppgift 3: Geometrisk tolkning >

---

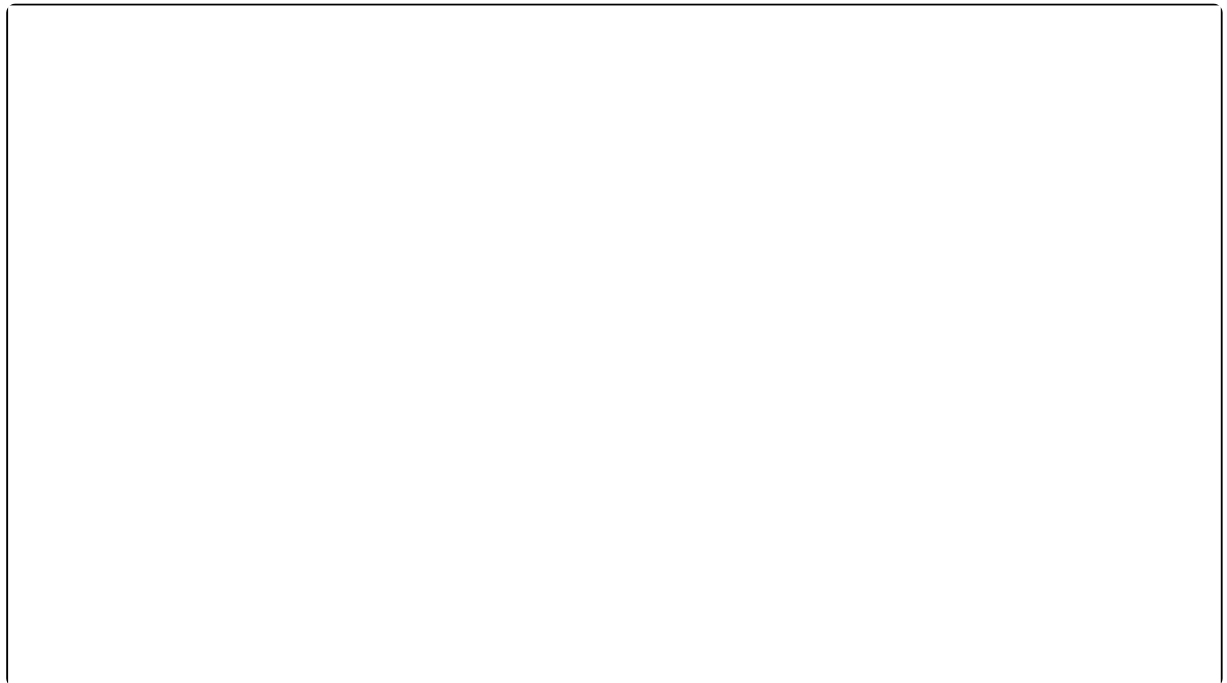
## Konceptuella uppgifter

🔗 Uppgift 4: Sant eller falskt? >

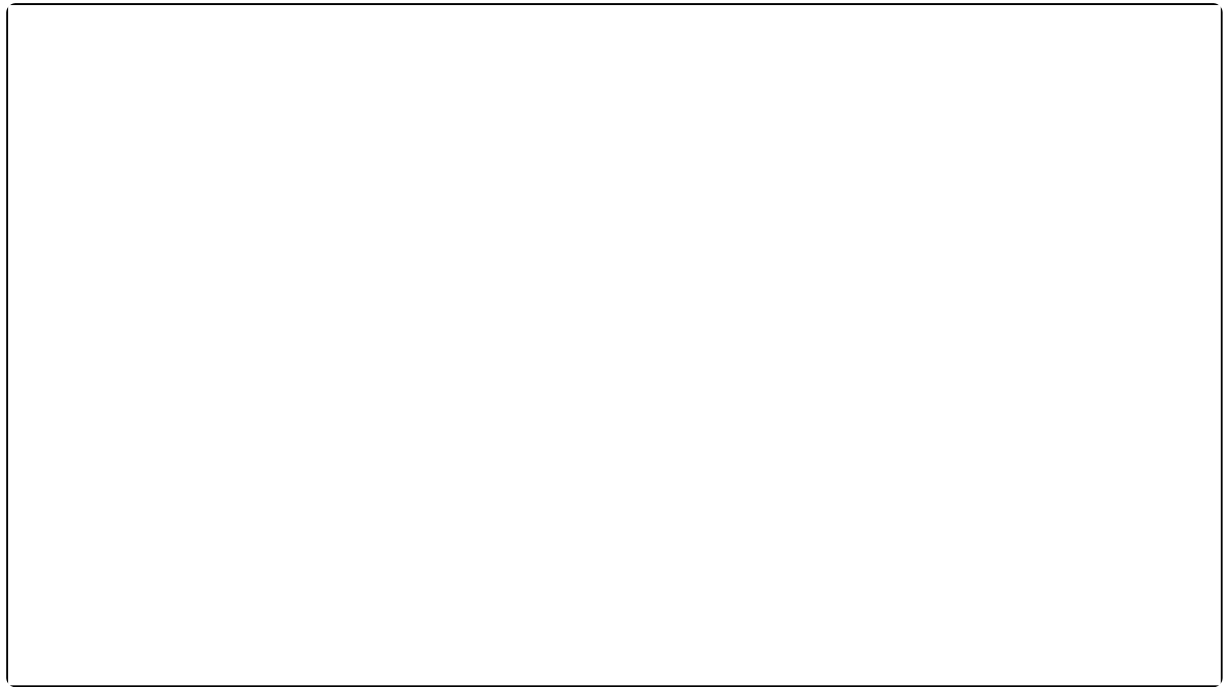
---

## Resurser

### Videor



Visuella introduktionen



## $2 \times 2$ -tricket

- [MIT 18.06SC: Eigenvalues and Eigenvectors \(Gilbert Strang\)](#) — klassisk föreläsning

## Interaktiva verktyg

- [matrixcalc.org](#) — beräkna egenvärden och egenvektorer online

## Wikipedia

- [Eigenvalues and eigenvectors](#)
- [Characteristic polynomial](#)

## Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Eigenvalues and Eigenvectors](#)
-