

Extremvärdesproblem

Jun 23, 2026, 6 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#optimering

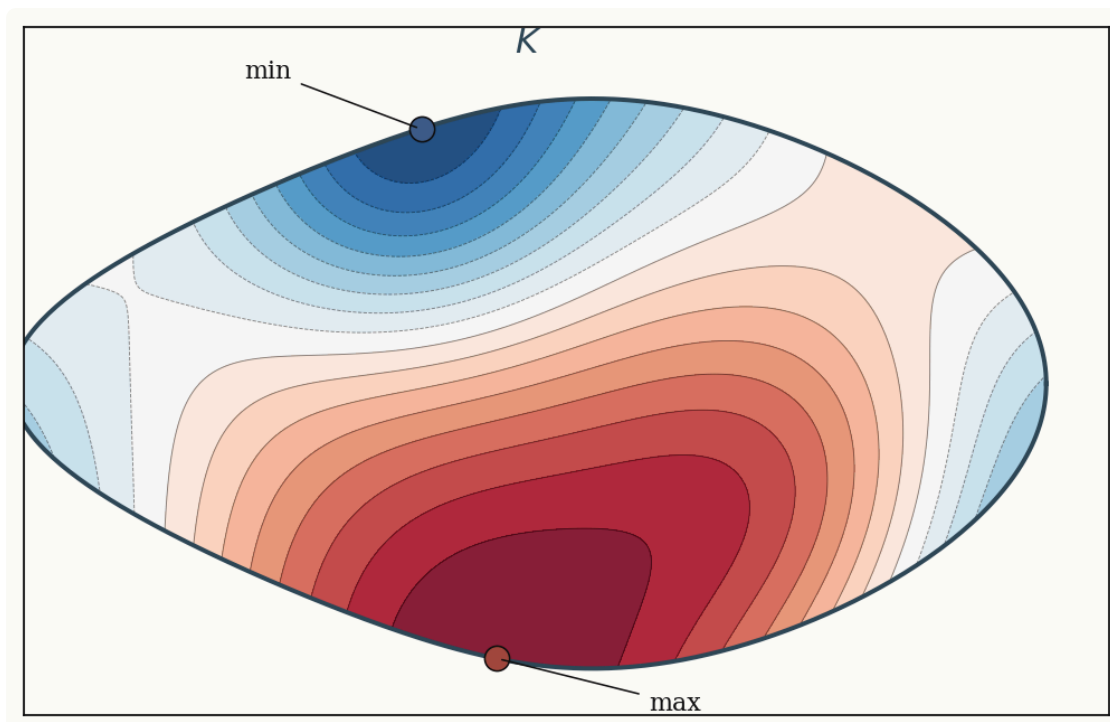
Kapitel: 14.1–14.2 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Kritiska punkter, Gradient och riktningsderivata, Partiella derivator

1. Frågan vi ställer

Givet en funktion $f(x, y)$ och en delmängd $K \subset \mathbb{R}^2$ – vilka är f :s största och minsta värde på K , och i vilka punkter antas de?

Grundtanken

Söket efter globala extremvärden delar upp K i två zoner: **det inre**, där en extrempunkt måste vara **kritisk**, och **randen** ∂K , där f blir en funktion av färre variabler som man kan optimera separat. Resten av jobbet är att lista alla kandidater och jämföra.



Bilden ovan illustrerar det generella läget: en kontinuerlig funktion (f – färgskalan) på ett kompakt område K (det inneslutna området) antar både ett största värde (max, röd) och ett minsta värde (min, blå). Vår uppgift är att lokalisera dem.

Weierstrass sats

Om f är **kontinuerlig** och K är **kompakt** (slutet och begränsat) så antar f både ett maximum och ett minimum på K . Frågan är aldrig *om* extremvärden existerar – bara *var* de ligger.

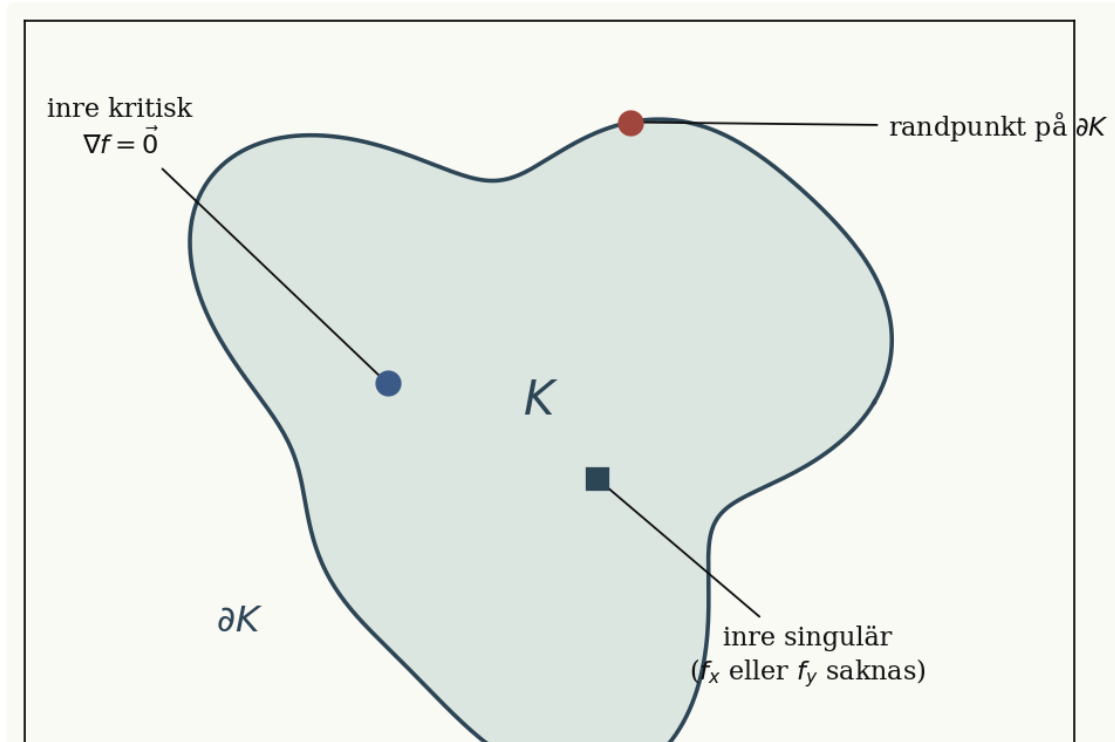
Tecken på ∂

Symbolen ∂ i ∂K betyder *rand* – den har ingenting med partialderivator att göra, trots notationen. Det är en av flervariabelanalysens trasiga vänner: samma symbol, två betydelser.

2. Var kan kandidaterna ligga?

Antag att $(x_0, y_0) \in K$ är en punkt där f antar sitt största värde (analogt för minsta). Då måste (x_0, y_0) vara av *en* av följande tre typer:

1. **Inre kritisk punkt** – (x_0, y_0) ligger strikt innanför K och uppfyller $\nabla f = \vec{0}$, dvs. $f_x(x_0, y_0) = 0$ och $f_y(x_0, y_0) = 0$.
2. **Inre singular punkt** – (x_0, y_0) ligger strikt innanför K men f_x eller f_y existerar inte där.
3. **Randpunkt** – $(x_0, y_0) \in \partial K$. Här gäller *inte* nödvändigtvis $\nabla f = \vec{0}$; randens geometri kan tvinga f att vara stor (eller liten) i en punkt som ändå inte är kritisk i hela planet.



🔄 Varför just dessa tre?

I en inre punkt där f är differentierbar och inte kritisk, pekar ∇f åt något håll – och då kan man röra sig en liten bit dit och öka f . Då kan punkten inte vara ett max. Argumentet gäller bara så länge man *får* flytta sig fritt i alla riktningar, vilket man bara får i det inre. På randen är man inlåst.

3. Metod – steg för steg

Receptet

1. **Inre kritiska punkter.** Lös ekvationssystemet $f_x = 0$, $f_y = 0$ och behåll de lösningar som ligger strikt innanför K .
2. **Inre singulära punkter.** Identifiera punkter där f_x eller f_y inte existerar. För polynom finns inga.
3. **Randen.** Parametrisera ∂K styckevis. På varje stycke blir f en envariabelsfunktion – derivera, sätt lika med noll, plocka ut alla lokala extrempunkter samt ändpunkter/hörn.
4. **Jämför.** Listan av kandidater är ändlig. Räkna f i varje punkt och välj största och minsta värdet.

Vanliga fallgropar

- **Glömt randen.** Inre kritiska punkter ger inte hela bilden om K är kompakt.
- **Behållit kandidater utanför K .** En lösning till $\nabla f = \vec{0}$ som ligger utanför K är inte en kandidat – kasta bort den.
- **Glömt hörnen.** På en styckevis slät rand är hörnen alltid kandidater, även om f inte är kritisk där.
- **Förväxlat lokala och globala.** Lokala extrempunkter inne i K är kandidater, inte automatiskt svaret – jämför med randvärdena.

Bivillkor i förklädnad

Steg 3 – randundersökningen – är samma sak som att optimera f under bivillkoret att (x, y) ligger på randen. När randen ges som en nivåkurva $g(x, y) = 0$ används ofta **Lagranges multiplikatormetod** istället för parametrisering.

4. Exempel – skivan

 [Exempel 1 – \$f\$ på enhetsskivan >](#)

5. Exempel – triangeln

☰ Exempel 2 – f på en triangel >

6. Vidare – bivillkor och randundersökning

När randen är beskriven *implicit* – som en nivåkurva $g(x, y) = 0$ snarare än styckevis parametriserad – blir steg 3 ofta enklare med **Lagranges multiplikator metod**. Då söks punkter där $\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$, dvs. där nivåkurvorna till f tangerar bivillkoret.

✍ Samma idé, annan språkdräkt

Randundersökning genom parametrisering och randundersökning via Lagrange ger samma kandidater. Vilken metod som är enklast beror på hur randen är given:

- **Lätt att parametrisera** (rät linje, cirkel, ellips): parametrisera och derivera.
- **Implicit nivåkurva** ($g(x, y) = 0$ med messig form): använd Lagrange.

7. Sammanfattning

🔗 Checklista för extremvärdesproblem

Givet f kontinuerlig på ett kompakt område $K \subset \mathbb{R}^2$:

1. **Inre kritiska punkter** – lös $\nabla f = \vec{0}$, behåll bara lösningar inuti K .
2. **Inre singulära punkter** – punkter där partialderivatorna inte existerar.
3. **Randen ∂K** – parametrisera styckevis, derivera, samla alla inre extrempunkter och hörn.
4. **Jämför** alla kandidater. Störst = max, minst = min.

Var i K	Villkor i kandidatpunkten
Inre, slät	$\nabla f = \vec{0}$
Inre, ej differentierbar	f_x eller f_y saknas
Rand (parametriserad)	$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 0$
Rand (implicit $g = 0$)	$\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$ (Lagrange)
Hörn på styckevis rand	tas med ovillkorligen

Läsning

- [14.1 Extreme Values](#)
- [14.2 Extreme Values on Restricted Domains](#)

Se även

- [Kritiska punkter](#)
- [Lagranges multiplikatorometod](#)
- [Gradient och riktningsderivata](#)
- [Nivåkurvor och ytor](#)
- [Partiella derivator](#)

Resurser

- [3Blue1Brown / Khan Academy: Lagrange multipliers, using tangency to solve constrained optimization](#) — bygger den geometriska intuitionen för randundersökning.
 - [Khan Academy: Maxima, minima and saddle points](#)
 - [Wikipedia: Extreme value theorem](#)
-