# Flödesintegraler

Jun 23, 2026, 4 min read

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Vektorfält, Parametriserade ytor, Ytintegraler, Orientering (kurvor och ytor)

---

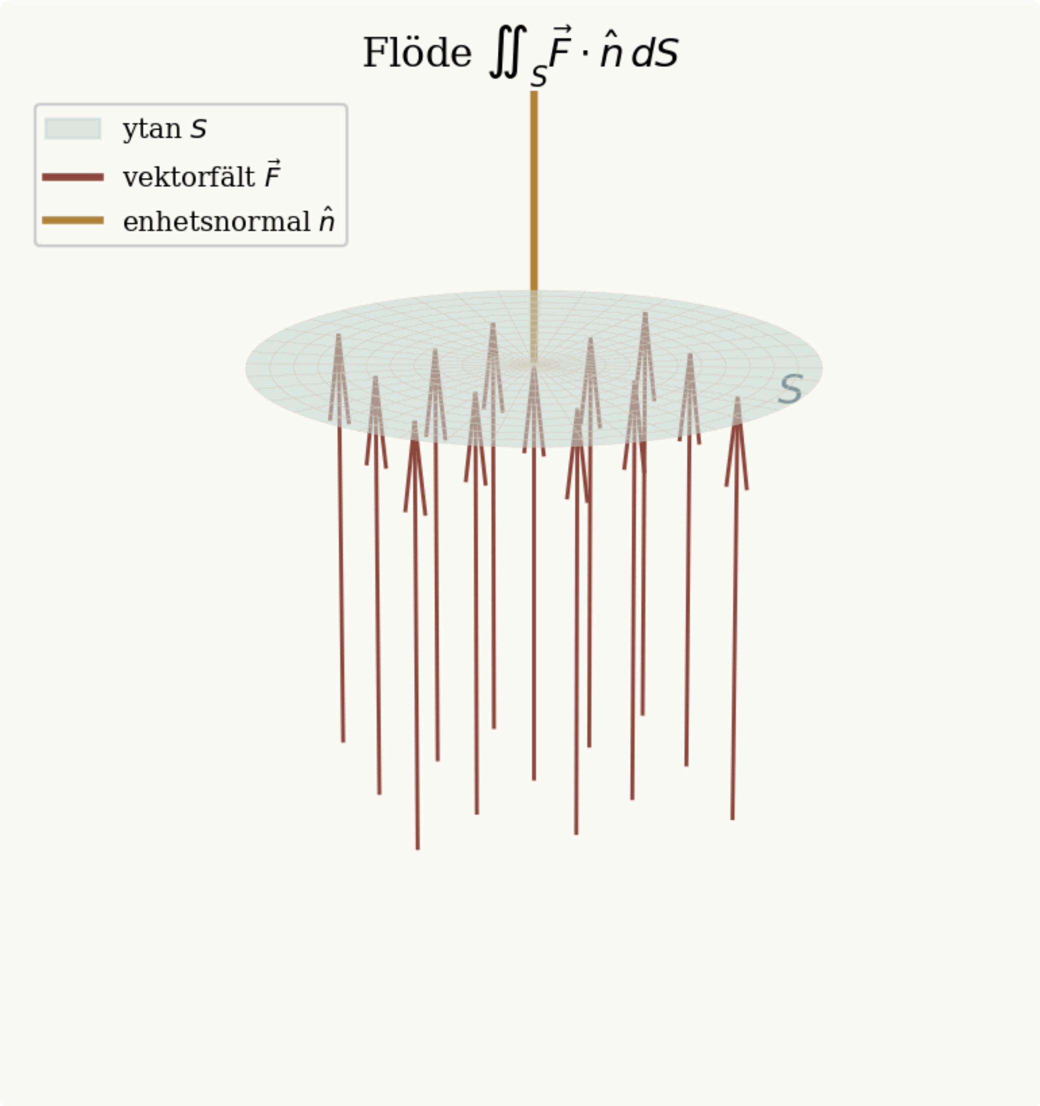
## 1. Idén — hur mycket "rinner igenom"?

Tänk dig att $\vec{F}$ är hastighetsfältet i en strömmande vätska. Genom en yta $S$ flödar det med en viss takt — så och så många liter per sekund. **Flödesintegralen** mäter exakt den takten. Mer abstrakt: den mäter hur mycket av $\vec{F}$ som *passerar* $S$, räknat med tecken efter en vald sida.

Tre saker att hålla isär:

- **Storleken** av $\vec{F}$ i punkten styr hur stor den lokala genomströmningen är.
- **Riktningen** av $\vec{F}$ relativt ytan avgör om det räknas som flöde *genom* — bara komponenten *vinkelrät* mot $S$ bidrar.
- **Orienteringen** av $S$ (vilken sida som är "ut") bestämmer tecknet.

> **Grundtanken**
>
> Endast $\vec{F}$:s normalkomponent bidrar till flödet. Tangentialdelen "glider längs" och passerar aldrig ytan.




## 2. Definition

Låt $S$ vara en orienterad yta med enhetsnormal $\hat{n}$ och $\vec{F}$ ett vektorfält. Flödet av $\vec{F}$ genom $S$ definieras som ytintegralen

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS}$$

där $d\vec{S} = \hat{n}\, dS$ är det vektorvärda arealelementet. Tecknet beror på orienteringen — se Orientering (kurvor och ytor).

## 3. Beräkning via parametrisering

Med $S$ parametriserad av $\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D$, är normalvektorn $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ och $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv$. Då försvinner längden mot normaliseringen:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\big)\, du\, dv}$$

Tecknet på $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ är det som bestämmer orienteringen — om man vill ha "andra sidan" tar man minus, eller byter parameterordningen.

### Specialfall — graf $z = f(x,y)$ uppåtorienterad

För $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ är $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-f_x, -f_y, 1)$, så

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \big(-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3\big)\, dx\, dy.$$

## 4. Egenskaper

- **Linjäritet** i $\vec{F}$.
- **Additivitet** över styckvis släta ytor.
- **Orientering**: $\displaystyle\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ — byter sida, byter tecken.
- **Slutna ytor**: konventionen är *utåtorienterad* normal. Då räknar man hur mycket som strömmar *ut* från det inneslutna området, och Gauss sats blir den naturliga räknemetoden.

## 5. Exempel

**Exempel 1 — flöde av $\vec{F} = (0,0,1)$ genom en halvsfär**

**Exempel 2 — elektriskt flöde genom en sfär (Gauss lag)**

**Exempel 3 — flöde av $\vec{F} = (x,y,z)$ genom enhetssfärens yta**

## 6. Räknemetod

**Räkneschema för $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$**

1. **Välj parametrisering** $\vec{r}(u, v)$ och området $D$.
2. **Bestäm orienteringen** — räkna $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ och kolla att den pekar åt rätt håll (annars byter tecknet eller parameterordningen).
3. **Räkna ut** $\vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$ som funktion av $(u, v)$.
4. **Integrera** över $D$.

**Alternativ:** är ytan sluten kan Gauss sats ofta ersätta hela ytintegralen med en *trippelintegral* över divergensen — oftast mycket snabbare.

**Skalär $\neq$ vektor**

$\iint_S f\, dS$ är en **skalär** ytintegral — tecken-okänslig. $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ är **flödesintegralen** — orienteringsberoende. Förväxla inte de två.

## Läsning

- 16.6 Oriented Surfaces and Flux Integrals

## Se även

- Ytintegraler
- Vektorfält
- Orientering (kurvor och ytor)
- Gauss sats
- Stokes sats
- Divergens och rotation

## Resurser

- Khan Academy: Flux in 3D

- Wikipedia: Flux