

Funktioner av flera variabler

Jun 23, 2026, 5 min read

#flervariabelanalys

#nivåkurva

Kapitel: 13.1 · Kurs: M0068M Förkunskaper: Nivåkurvor och ytor

1. Funktioner av flera variabler – Översikt

En funktion av flera variabler tar ett **par (eller tupel) av tal** och returnerar ett enda tal. Det är en naturlig generalisering av envariabelfunktioner $f(x)$.

Motiverande exempel

Rektangelns area beror på två mått:

$$A = f(x, y) = xy$$

Volymen av en kon beror på radien r och höjden h :

$$V = f(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Temperaturen på en plåt i punkten (x, y) :

$$T = f(x, y), \quad (x, y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$$

Temperaturen i en kropp vid tid t :

$$T = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (\text{fyra variabler})$$

2. Definition

2.1 Funktion av två variabler

En **funktion av två variabler** är en regel f som till varje punkt (x, y) i definitionsmängden $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ tillordnar ett entydigt reellt tal z :

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

2.2 Funktion av tre (eller fler) variabler

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z)$$

Eller mer generellt med n variabler: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.3 Definitionsmängd

Definitionsmängden D_f är mängden av alla punkter där f är definierad. Om inget annat anges antas den **maximala naturliga definitionsmängden**.

☰ [Exempel: Bestäm definitionsmängden >](#)

3. Funktionens graf (Funktionsyta)

Definition

Grafen (funktionsytan) till $f(x, y)$ är mängden av alla punkter (x, y, z) i \mathbb{R}^3 som uppfyller $z = f(x, y)$:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

Grafen är en **yta i det tredimensionella rummet** med D_f som "skugga" i xy -planet.

☰ [Exempel: Identifiera grafen >](#)

Rotationsytor

En **rotationsyta** fås när en kurva $z = g(r)$ roteras kring z -axeln. Eftersom $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gäller:

$$z = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

☰ Exempel: Rotationsytor >

Ellipsoiden

En viktig yta som **inte** är en funktionsyta (den klarar inte vertikaltestet globalt):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

med halvaxlar a , b , c längs respektive koordinataxel.

4. Nivåkurvor

Definition

En **nivåkurva** (eng. *level curve* eller *contour*) till $f(x, y)$ för värdet c är kurvan i xy -planet som ges av:

$$f(x, y) = c$$

Geometriskt: skär funktionsytan $z = f(x, y)$ med det horisontella planet $z = c$, och projicera snittet ned på xy -planet.

Nivåkurvor visualiseras som **höjdkurvor** på en topografisk karta – varje kurva representerar en konstant höjd.

✎ Tänk topografi >

☰ Exempel: Rita nivåkurvor >

5. Nivåytor

Definition

För en funktion av **tre variabler** $f(x, y, z)$ definieras en **nivåyta** (eng. *level surface*) för värdet c som:

$$f(x, y, z) = c$$

Nivåytan är en **yta i \mathbb{R}^3** – analogt med hur en nivåkurva är en kurva i \mathbb{R}^2 .

☰ [Exempel: Nivåytor](#) >

Sammanfattning: Dimension

Funktion	Nivåmängd	Geometri
$f(x, y)$	$f(x, y) = c$	Kurva i \mathbb{R}^2
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = c$	Yta i \mathbb{R}^3

6. Det tredimensionella koordinatsystemet

För att beskriva funktionsytor arbetar vi i \mathbb{R}^3 med:

- **Origo** O
- Tre ortogonala enhetsbasvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (längs x -, y -, z -axeln)
- En punkt P beskrivs av sin **lägesvektor** $\vec{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$

Avstånd från origo till punkten (x, y, z) :

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Läsning

- [13.1 Functions of Several Variables](#)

Se även

- [Nivåkurvor och ytor](#)
 - [Parametriserade kurvor](#)
 - [Elipsen](#)
-

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Visualizing multivariable functions](#) — visuell introduktion till flervariabelfunktioner
- [Khan Academy: Multivariable functions](#) — introduktion med exempel
- [MIT OCW 18.02: Functions of several variables](#) — föreläsningar från MIT

Interaktiva verktyg

- [GeoGebra 3D Calculator](#) — rita grafer $z = f(x, y)$ och nivåkurvor interaktivt
- [Desmos 3D](#) — utforska ytor och nivåkurvor
- [CalcPlot3D](#) — visualisera nivåkurvor och -ytor

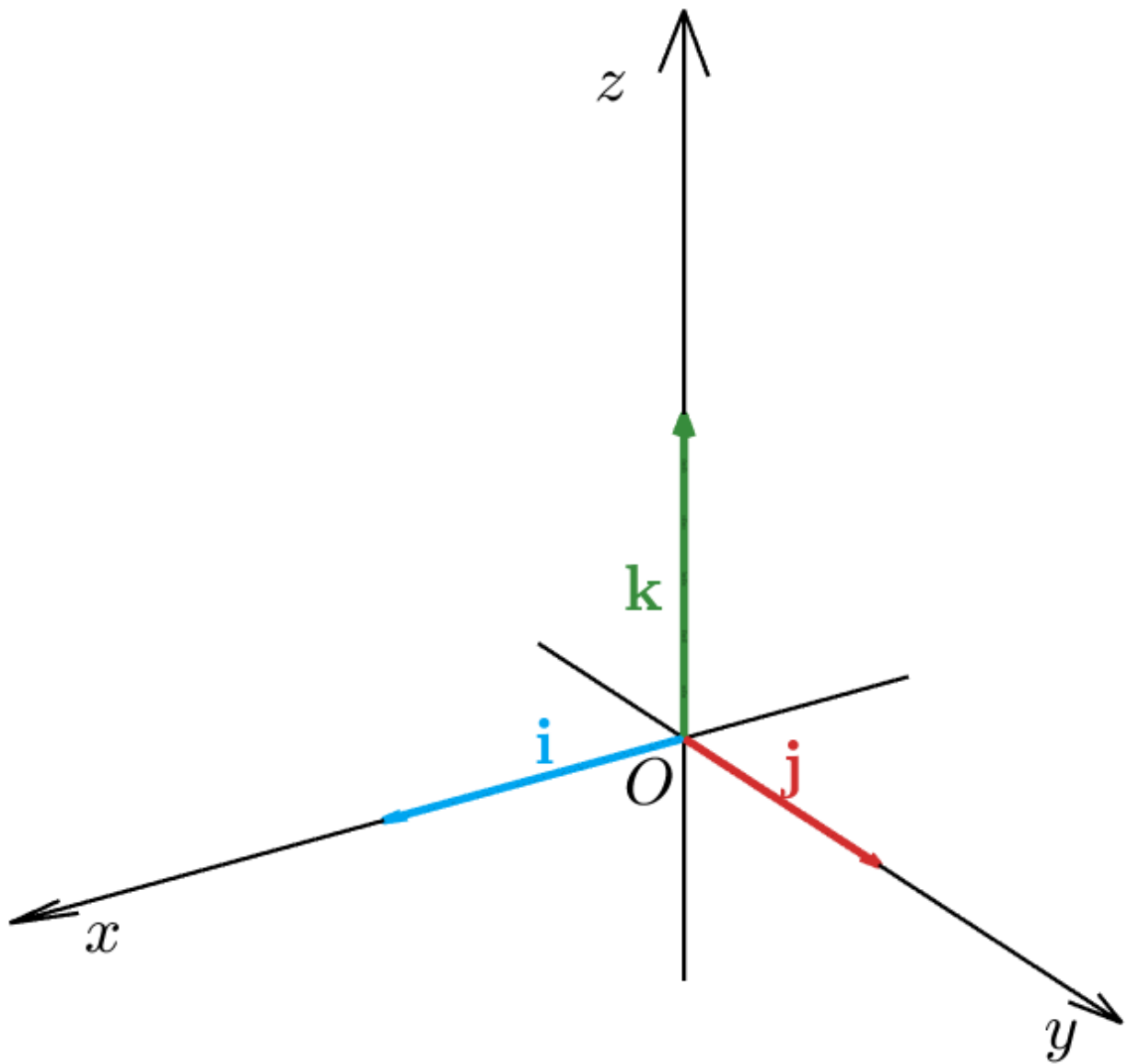
Wikipedia

- [Function of several real variables](#)
- [Level set](#)
- [Contour line](#)

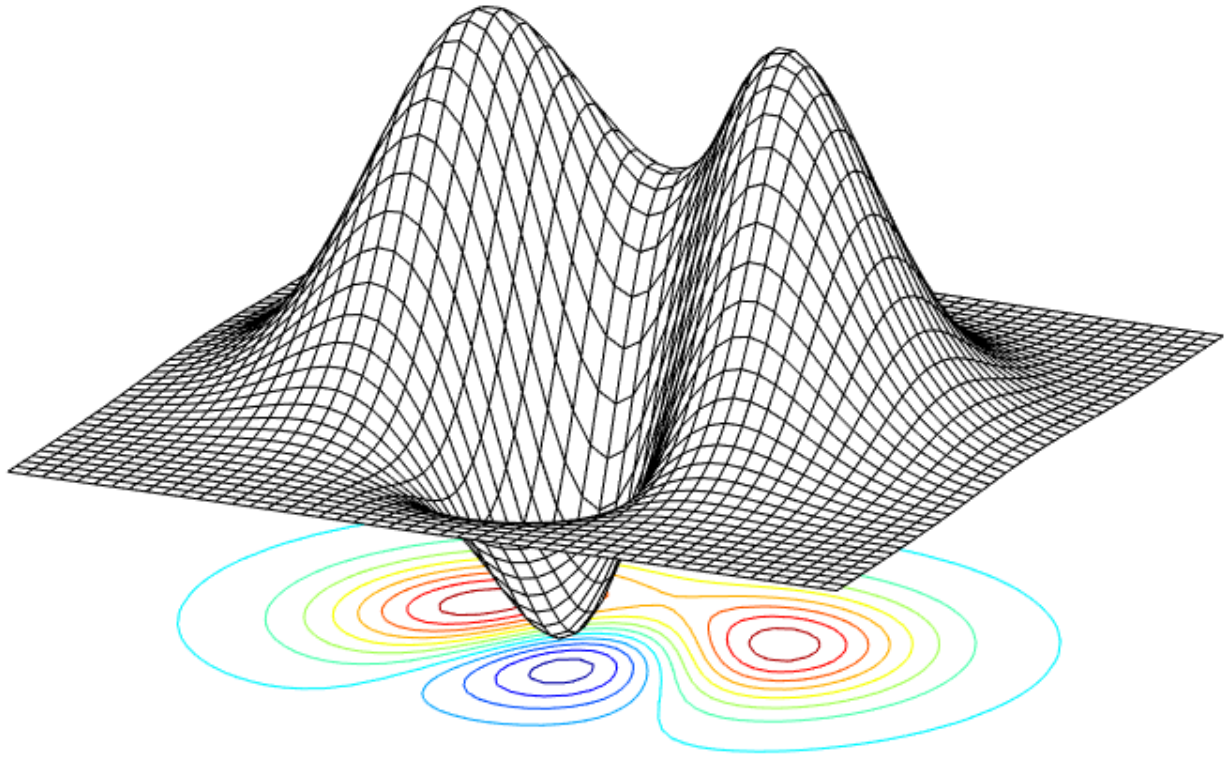
Fördjupning

- [Immersive Math: Functions of Several Variables](#) — interaktiv lärobok
- [Paul's Online Math Notes: Functions of Several Variables](#) — tydliga anteckningar med exempel

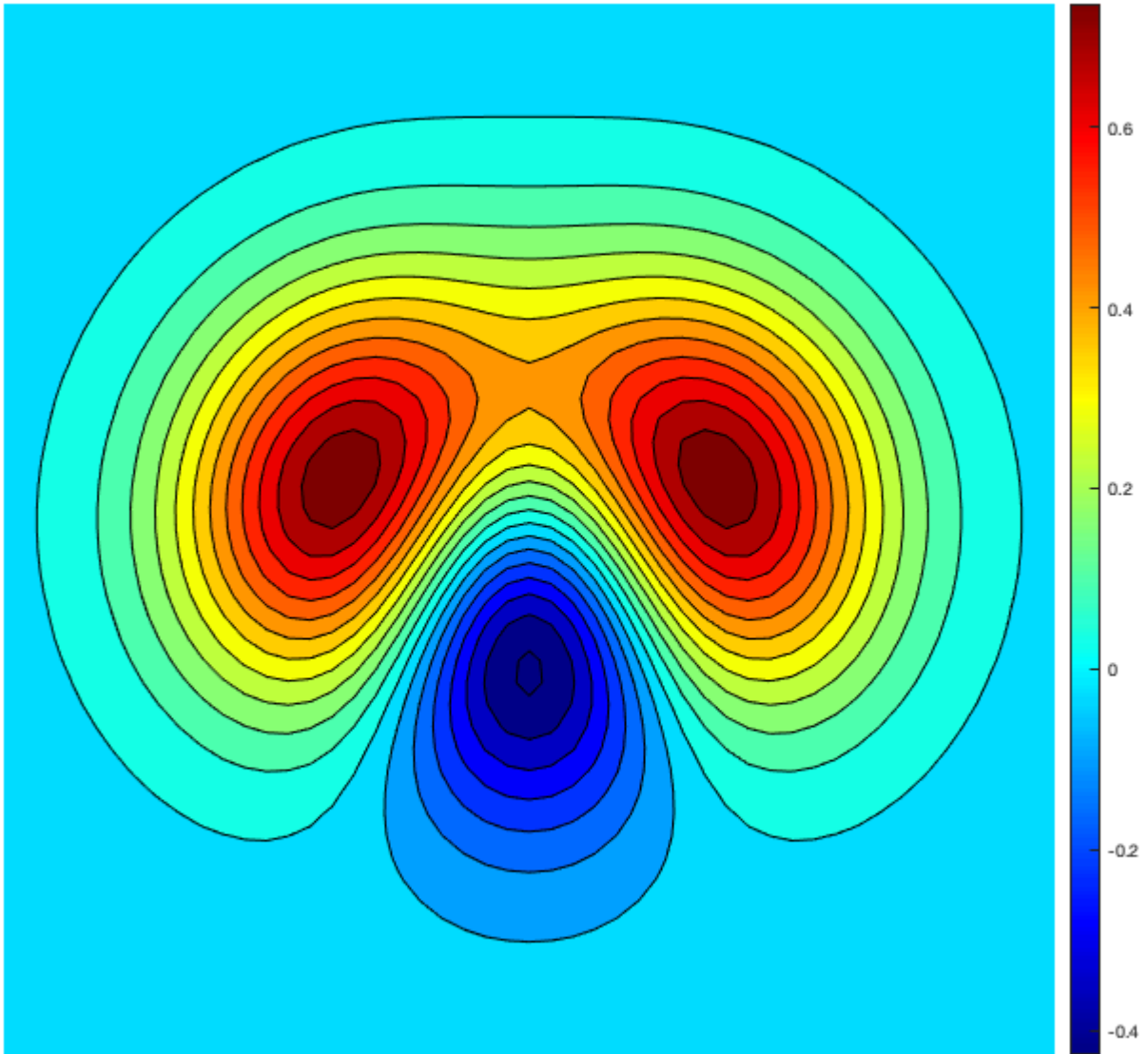
Illustrationer



Kartesiskt koordinatsystem



Funktionsyta



Nivåkurvor
