

Gauss sats

Jun 23, 2026, 4 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Divergens och rotation, Flödesintegraler, Trippelintegraler

1. Idén – utflöde lika med inre produktion

Gauss sats (även kallad **divergenssatsen**) säger något oerhört naturligt: hur mycket som strömmar *ut* genom randen av en volym är lika med hur mycket som *produceras* inuti. Källor och sänkor på insidan är det enda som syns på utsidan.

Grundtanken

$\nabla \cdot \vec{F}$ mäter lokalt om en punkt är en *källa* (> 0) eller *sänka* (< 0). När man summerar över hela volymen ska det som blir över synas som ett *flöde* ut genom ytan. Det är precis vad satsen säger.

Den binder ihop tre tidigare begrepp:

Lokalt

divergens $\nabla \cdot \vec{F}$

vektorfältets normalkomponent

Globalt

trippelintegral $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

flöde $\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

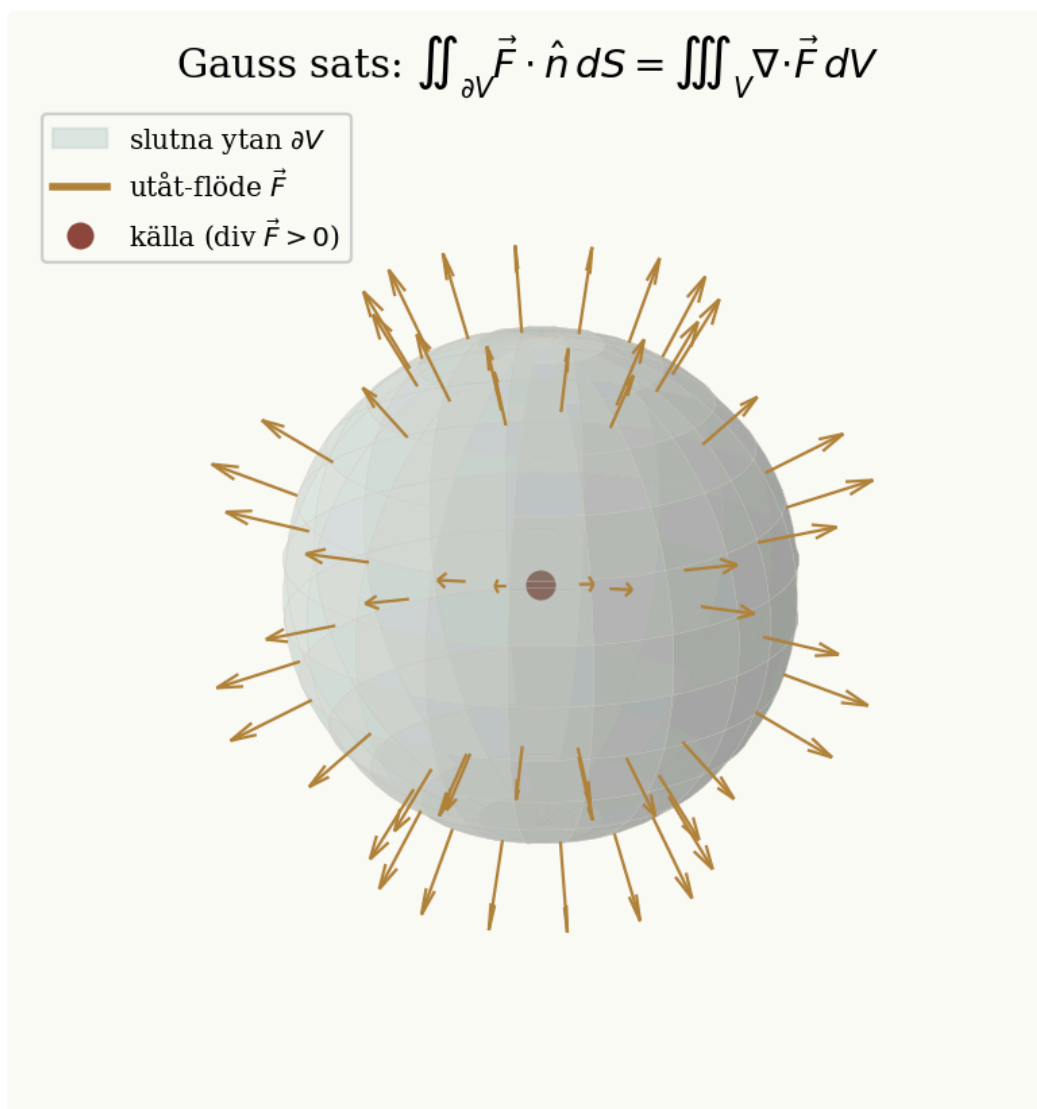
2. Satsen

🔄 Gauss sats (divergenssatsen)

Låt V vara en begränsad volym i \mathbb{R}^3 med styckvis slät, **utåtorienterad** rand ∂V .
Låt \vec{F} vara ett C^1 -vektorfält i en omgivning av V . Då

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Den vänstra sidan är **flödet** ut genom ∂V . Den högra är "totala produktionen" av \vec{F} i V .
Att de är lika är en av kalkylens skönaste likheter.



3. Varför är detta sant?

Tänk er V uppdelad i många små kuber. För en enda liten kub är flödet ut genom dess sex sidor *exakt* $\nabla \cdot \vec{F}$ gånger kubens volym (det är *definitionen* av divergens i gränsen). När man nu summerar över alla kuber:


- de **inre** sidoflödena tar ut varandra — det som lämnar en kub strömmar in i grannen,
- bara de **yttre** sidoflödena överlever — de sitter på ∂V .


Summan av små “lokalt utflöde” blir alltså globalt flöde ut, vilket är exakt vad satsen påstår.

Anlogi

Greens sats är 2D-versionen — flöde ut genom en plan kurva = dubbelintegral av divergensen. Gauss sats är samma idé en dimension upp. De är båda specialfall av den allmänna **Stokes sats** för differentialformer.

4. Exempel

 **Exempel 1** — $\vec{F} = \vec{r}$ över valfri volym >

 **Exempel 2** — flöde av $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ ut ur enhetskub >

 **Exempel 3** — Gauss lag för elektrostatik >

5. När är Gauss sats användbar?

Tre situationer där satsen verkligen lönar sig

1. **Trippelintegralen är enkel, ytintegralen krånglig.** Ofta är $\nabla \cdot \vec{F}$ konstant eller mycket enkel, så $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$ blir trivial — medan flödet över en sluten yta med flera släta bitar är mödosamt.

2. **Sluten yta saknar en bit.** Behöver du flödet genom en *öppen* yta S_1 ? Slut den med en hjälpbit S_2 (t.ex. en plan disk) så att $S_1 \cup S_2$ är sluten. Använd Gauss sats på den slutna ytan och dra av Φ_{S_2} – som ofta är enkelt.

3. **Symmetri.** Med sfär-, cylinder- eller boxsymmetri kan satsen användas baklänges för att räkna *fältet* från en känd laddningsfördelning – det är så Coulombs lag härleds från Maxwells ekvationer i fysiken.

6. Antaganden – det fina trycket

- V ska vara en *begränsad* volym med en *snäll* rand (styckvis slät, orienterbar, inåt-/utåt-distinktion meningsfull).
- \vec{F} måste vara C^1 på en omgivning av hela V – inga singulariteter i det inre. I exempel 3 ovan måste man hantera origo separat eftersom \vec{E} är singularärt där.
- ∂V orienteras med **yttre normal**. Inåtorientering byter tecken.

Läsning

- [17.4 The Divergence Theorem in 3-Space](#)

Se även

- [Divergens och rotation](#)
- [Flödesintegraler](#)
- [Trippelintegraler](#)
- [Stokes sats](#)
- [Greens sats](#)

Resurser

- [Khan Academy: Divergence theorem](#) [↗](#)
 - [3Blue1Brown: Divergence and curl](#) [↗](#) – bygger intuitionen.
 - [Wikipedia: Divergence theorem](#) [↗](#)
-