

Gränsvärden och kontinuitet

Jun 23, 2026, 5 min read

#flervariabelanalys

#gränsvärde

#kontinuitet

Kapitel: 13.2 · Kurs: M0068M Förkunskaper: Nivåkurvor och ytor, Partiella derivator

1. Avstånd i \mathbb{R}^2

Avståndet mellan punkterna (x, y) och (a, b) i planet definieras som:

$$|(x, y) - (a, b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Detta är den euklidiska normen och generaliserar den vanliga absolutbeloppet från envariabelanalys. Att $(x, y) \rightarrow (a, b)$ betyder att detta avstånd går mot noll.

2. Gränsvärde

2.1 Definition

Låt $f(x, y)$ vara definierad i en omgivning kring (a, b) (men inte nödvändigtvis i (a, b) självt). Vi säger att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

om $f(x, y)$ kan göras godtyckligt nära L för alla (x, y) tillräckligt nära (a, b) . Formellt: för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

2.2 Skillnaden från envariabelfallet

I envariabelanalys räcker det att kontrollera närmande från vänster och höger – två riktningar. I \mathbb{R}^2 måste gränsvärdet vara **detsamma längs alla möjliga kurvor** som leder till (a, b) . Det finns oändligt många sådana vägar.

 [Varför oändligt många vägar? >](#)

3. Visa att ett gränsvärde inte existerar

3.1 Metod: Olika vägar ger olika värden

Om man kan hitta **två vägar** till (a, b) längs vilka $f(x, y)$ närmar sig **olika värden**, existerar gränsvärdet inte.

Standardvägar att prova:

Väg	Substitution
Längs x -axeln	Sätt $y = 0$, låt $x \rightarrow a$
Längs y -axeln	Sätt $x = 0$, låt $y \rightarrow b$
Längs linjen $y = x$	Sätt $y = x$, låt $x \rightarrow a$
Längs parabeln $y = x^2$	Sätt $y = x^2$, låt $x \rightarrow 0$
Längs linjen $y = mx$	Sätt $y = mx$, låt $x \rightarrow 0$

 **Vanlig fallgrop – samma svar längs två vägar räcker inte**

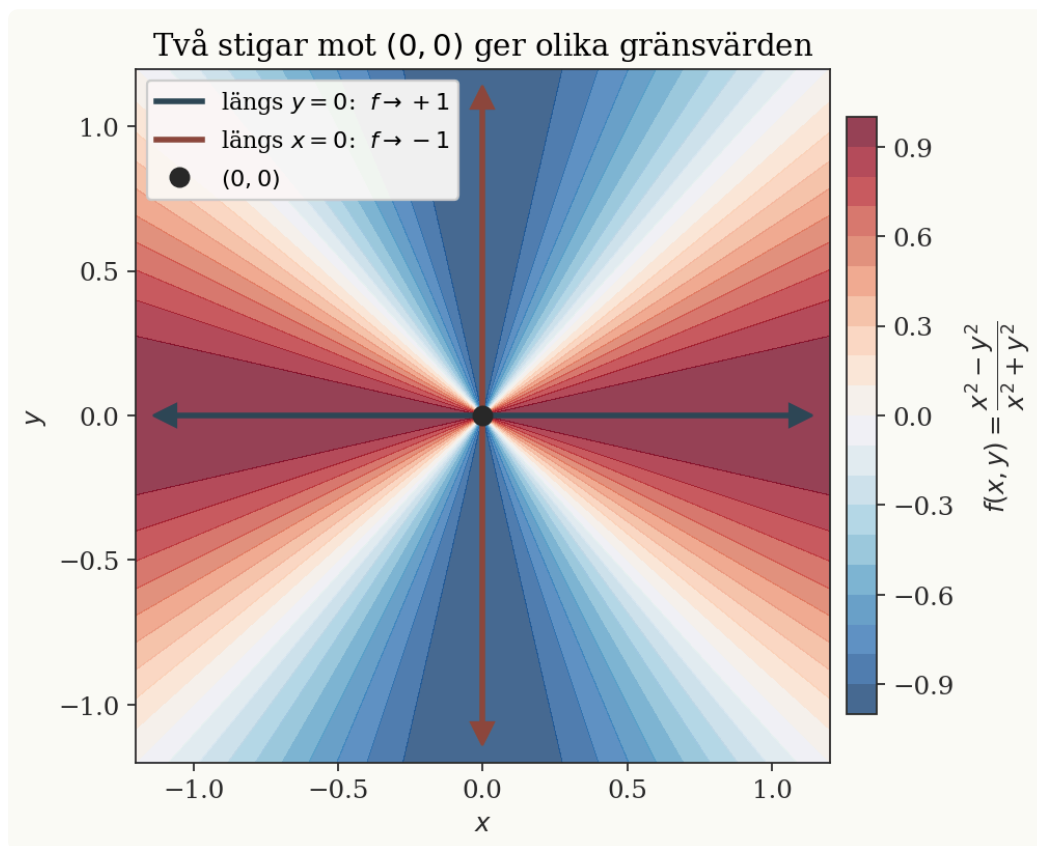
Att f ger **samma värde** längs två valda vägar bevisar **inte** att gränsvärdet existerar. Gränsvärdet måste vara detsamma längs *alla* möjliga vägar – oändligt många.

Slutsats du INTE kan dra: “Längs $y = 0$ och $y = x$ fick jag 0 – alltså är gränsvärdet 0.” Två vägar kan bara *motbevisa* existens (om de ger olika svar), aldrig *bevisa* den.

☰ Gränsvärde som inte existerar: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} >$

☰ Gränsvärde som inte existerar: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} >$

☰ Gränsvärde längs $y = mx$ ger en familj av svar >



4. Visa att ett gränsvärde existerar

4.1 Direktinsättning

Om f är kontinuerlig i (a, b) (se avsnitt 5) kan man sätta in direkt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

4.2 Klämlemmat i 2D

Om $|f(x,y) - L| \leq g(x,y)$ och $g(x,y) \rightarrow 0$ när $(x,y) \rightarrow (a,b)$, så är $\lim f(x,y) = L$.

Vanlig strategi: Uppskatta $|f(x,y)|$ med hjälp av $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (polära koordinater nära origo) och visa att uttrycket går mot noll.

☰ **Gränsvärde med klämlemmat:** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} >$

☰ **Polära koordinater:** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} >$

5. Kontinuitet

5.1 Definition

Funktionen $f(x,y)$ är **kontinuerlig i punkten** (a,b) om:

1. $f(a,b)$ är definierat,
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ existerar,
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

$$f \text{ kontinuerlig i } (a,b) \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

5.2 Kontinuerliga funktioner

Alla elementära funktioner (polynom, rationella funktioner, trigonometriska, exponentialfunktioner, logaritmer) är kontinuerliga i sina definitionsmängder. Sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga.

☰ Avgör om f är kontinuerlig i $(0, 0)$ >

☰ Avgör om g är kontinuerlig i $(0, 0)$ >

6. Sammanfattning – Tillvägagångssätt

📖 Tillvägagångssätt – steg för steg

Steg 1 – Direktinsättning: Är f kontinuerlig i (a, b) ? Sätt in direkt.

Steg 2 – Misstänker du att gränsvärdet INTE existerar? Prova längs $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = x^2$, $y = mx$. Två vägar med **olika** svar \Rightarrow gränsvärdet existerar **inte**.

Steg 3 – Tror du att gränsvärdet existerar? Uppskatta $|f(x, y) - L|$ uppifrån med ett uttryck som $\rightarrow 0$. Använd **klämlemmat**. Polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ underlättar ofta nära origo.

Läsning

- 13.2 Limits and Continuity

Se även

- Nivåkurvor och ytor
- Partiella derivator
- Kedjeregeln

Resurser

Videor

- [Professor Leonard: Limits of Multivariable Functions](#) — grundlig genomgång med flervägsteknik
- [Khan Academy: Multivariable limits](#) — introduktion med visualiseringar
- [MIT OpenCourseWare 18.02: Limits](#) — föreläsningsanteckningar

Interaktiva verktyg

- [Desmos 3D](#) — visualisera ytor och närmanden längs kurvor
- [GeoGebra 3D Calculator](#) — utforska gränsvärden grafiskt

Wikipedia

- [Limit of a function \(multivariable\)](#)
 - [Continuous function](#)
-