Gradient och riktningsderivata

Jun 23, 2026, 5 min read

#flervariabelanalys #gradient #partiell-derivata

> **Kapitel:** 13.7 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator, Kedjeregeln

---

1. Gradienten

Gradienten samlar alla partiella derivator för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i en enda vektor. Den beskriver hur f förändras i varje koordinatriktning och är ett centralt verktyg i flervariabelanalys.

1.1 Definition

För $f(x, y, z)$ definieras gradienten som:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Notation

$$\vec{\nabla} f \quad \text{eller} \quad \operatorname{grad} f$$

1.2 För funktioner av två variabler

För $f(x, y)$ förenklas definitionen till:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

☰ **Beräkna gradient för $f(x, y) = x^2 + 3xy$ ›**

---

2. Riktningsderivatan

Partiella derivator mäter förändring längs koordinataxlarna. Riktningsderivatan generaliserar detta — den ger förändringen av f i en valfri riktning $\hat{u}$.

2.1 Definition och formel

För en enhetsvektor $\hat{u}$ med $||\hat{u}|| = 1$ definieras riktningsderivatan av f i riktningen $\hat{u}$ som:

$$\boxed{D_{\hat{u}}\, f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}}$$

⚠ **Riktningsvektorn måste vara normerad**

$D_{\hat{u}}\, f$ kräver $||\hat{u}|| = 1$. Om du ges en godtycklig riktning $\vec{v}$, normera alltid först: $\hat{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ Glömmer du normeringen skalas svaret av $||\vec{v}||$ — en vanlig räknmiss.

2.2 Partiella derivator som specialfall

Om $\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fås:

$$D_{\hat{u}}\, f = \vec{\nabla} f \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Riktningsderivatan inkluderar alltså partiella derivator som specialfall.

☰ **Beräkna riktningsderivata för $f(x, y) = x^2 y + y^3$ i riktningen $(1, 1)$ ›**

---

3. Geometrisk tolkning

3.1 Vilket $\hat{u}$ maximerar $D_{\hat{u}}\,f$?

Använd skalärproduktens definition:

$$D_{\hat{u}}\,f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = |\vec{\nabla} f|\,|\hat{u}|\cos\theta = |\vec{\nabla} f|\cos\theta$$

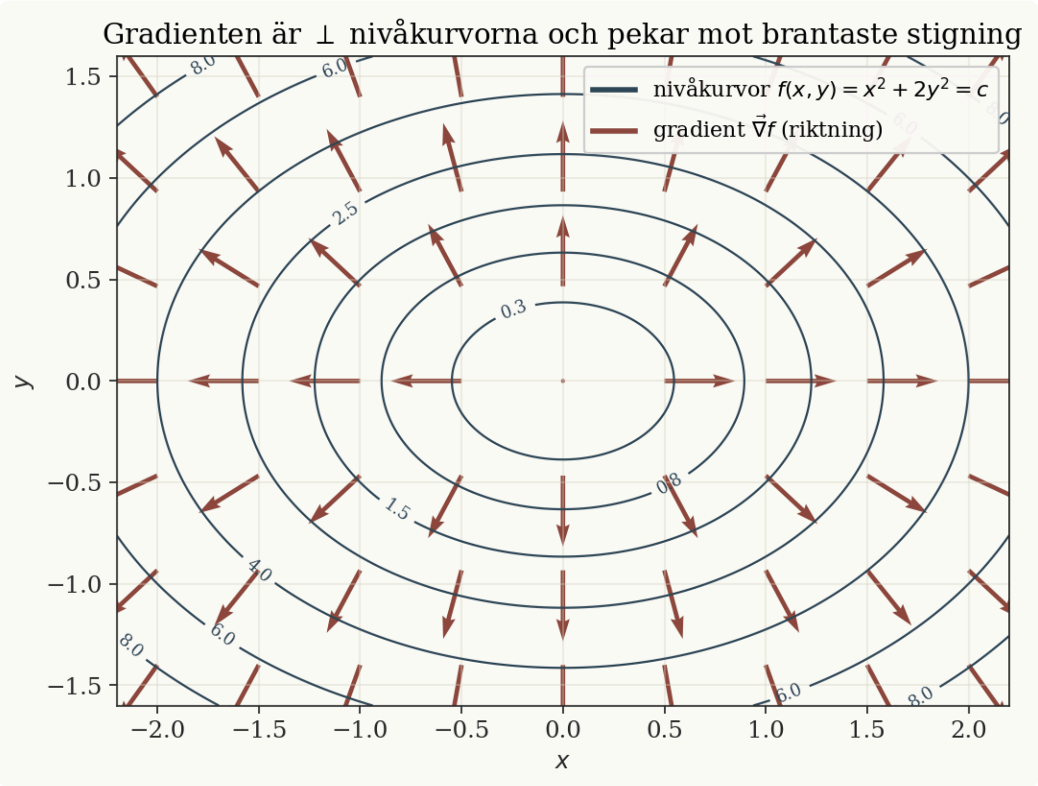
Eftersom $|\hat{u}| = 1$ beror uttrycket enbart på vinkeln θ mellan $\vec{\nabla} f$ och $\hat{u}$. Cosinus är maximal (= 1) när $\theta = 0$, dvs när $\hat{u}$ pekar i samma riktning som $\vec{\nabla} f$.

3.2 Sammanfattning — gradientens egenskaper

Egenskap	Beskrivning
$\vec{\nabla} f$ pekar mot **brantaste stigning**	Riktningen där f ökar snabbast
$\|\vec{\nabla} f\|$ är **maximal ändringstakt**	Storleken på den snabbaste ökningen
$-\vec{\nabla} f$ pekar mot **brantaste nedstigning**	Riktningen där f minskar snabbast
$\vec{\nabla} f \perp$ **nivåyta** $f = \text{konstant}$	Gradienten är normalvektor till nivåytan

Geometrisk intuition — berglandskapet

Kom ihåg: Gradienten pekar åt det **brattigast uppför**-hållet. Nivåkurvorna (höjdkurvorna på en karta) är alltid $\perp$ gradienten. Tätt liggande nivåkurvor = stor $\|\nabla f\|$ = brant lutning.



Grad och nivåkurva för $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ >

---

4. Tangentplan till en nivåyta

4.1 Uppställning

Låt $g(x, y, z) = C$ vara en nivåyta och (a, b, c) en punkt på ytan.

Eftersom $\vec{\nabla} g(a, b, c)$ är normalvektor till nivåytan i punkten (a, b, c) ges tangentplanet av:

$$\boxed{\vec{\nabla} g(a, b, c) \cdot \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix} = 0}$$

4.2 Utskriven form

$$g_x(a,b,c)(x-a)+g_y(a,b,c)(y-b)+g_z(a,b,c)(z-c)=0$$

Jämförelse med tangentplanet till en graf $z = f(x,y)$ >

Bestäm tangentplanet till $x^2+y^2+z^2=14$ i punkten $(1,2,3)$ >

Läsning

- 13.7 Gradients and Directional Derivatives

Se även

- Partiella derivator
- Kedjeregeln
- Kritiska punkter
- Lagranges multiplikatormetod

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Gradient descent, how neural networks learn (kap 2) — gradientens roll i optimering och maskininlärning
- 3Blue1Brown: What's a tensor? (bonus) — djupare geometrisk förståelse av gradienten
- Khan Academy: Directional derivatives and slope — introduktion till riktningsderivatan

Interaktiva verktyg

- GeoGebra: Gradient Field 3D — visualisera gradientfält i 3D
- Desmos: Level curves and gradient — rita nivåkurvor och gradientvektorer

- WolframAlpha: Gradient — beräkna gradienter steg för steg

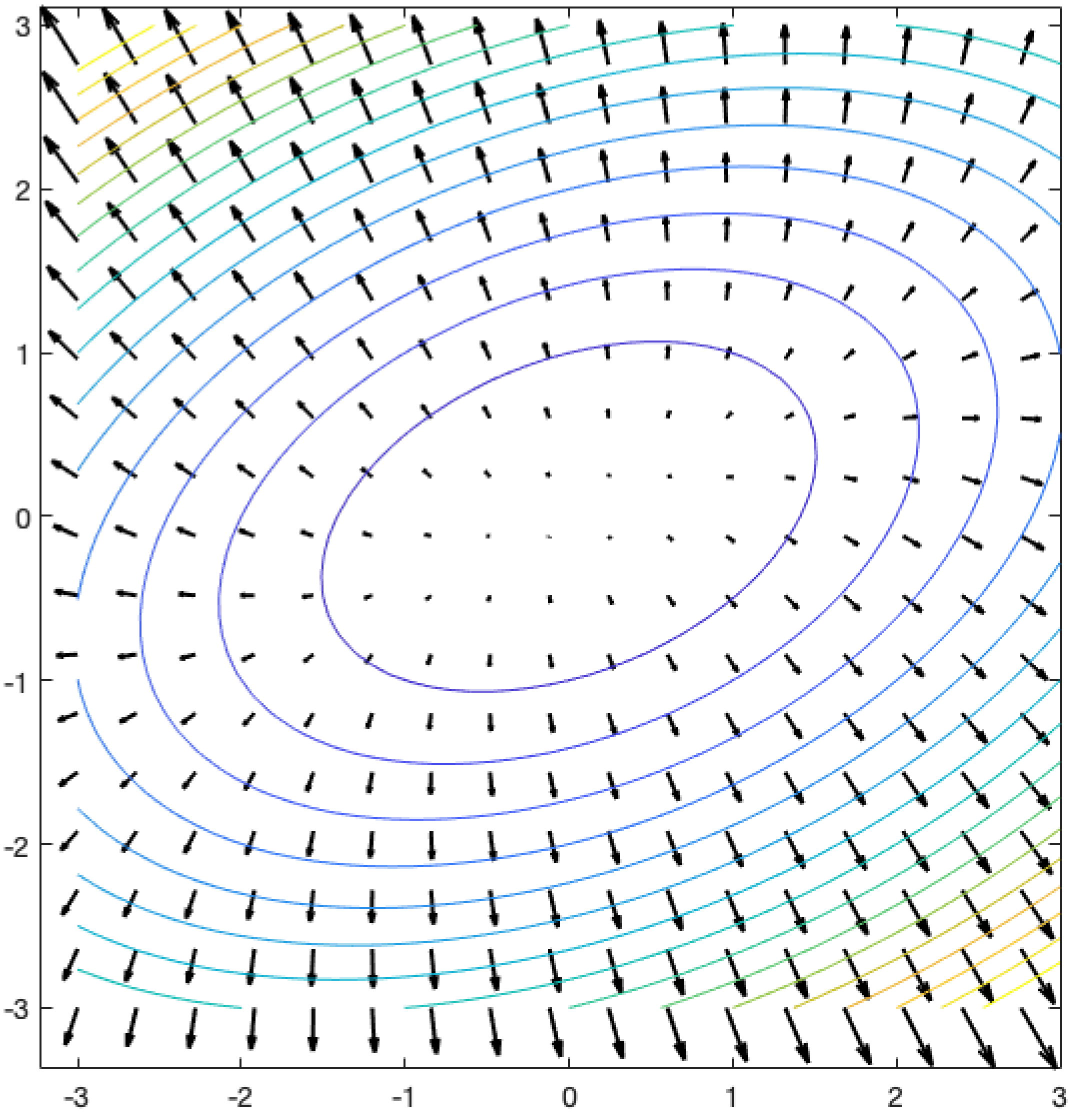
Wikipedia

- Gradient
- Directional derivative
- Level set

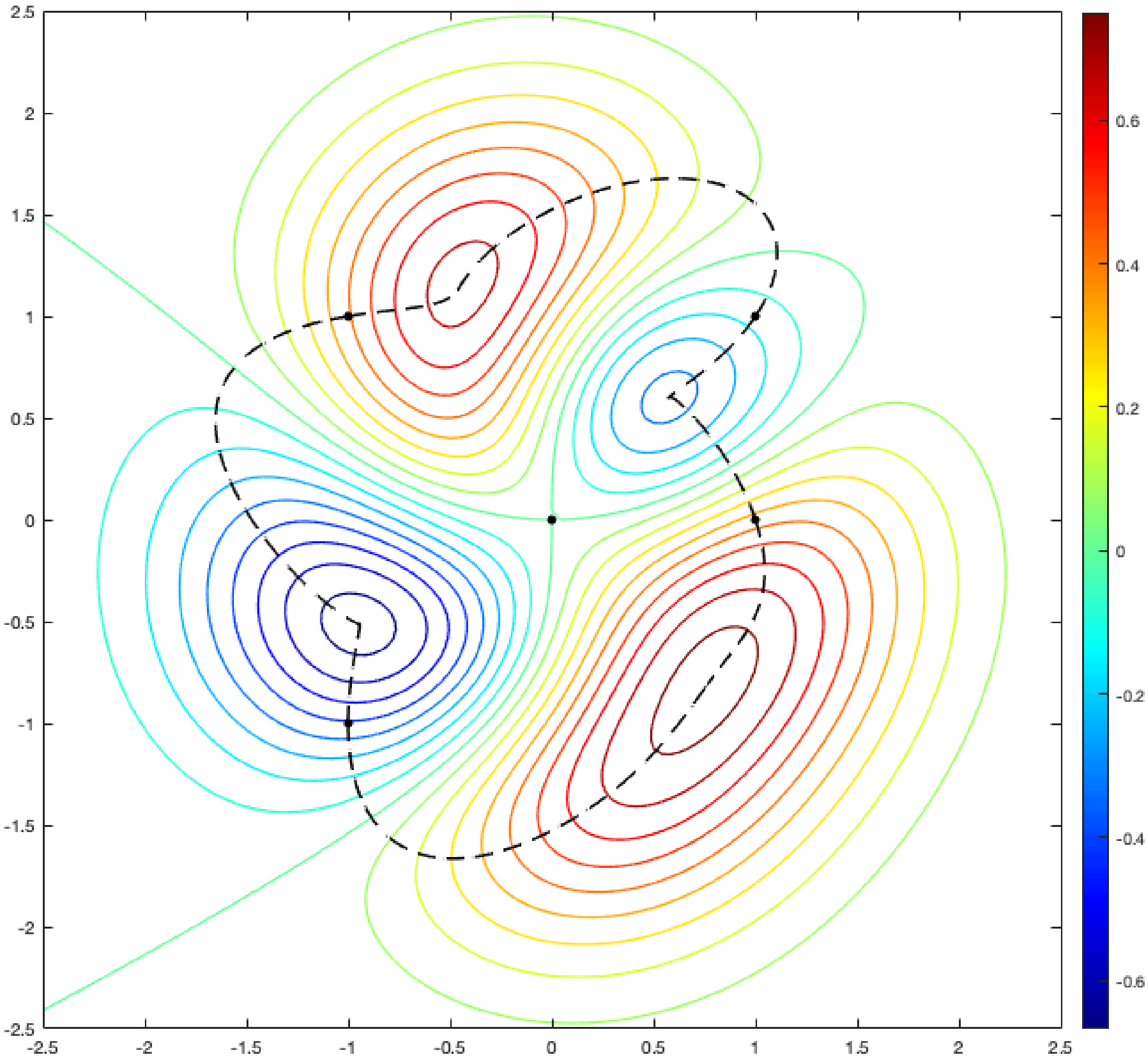
Fördjupning

- Immersive Math — Chapter 8: The Gradient — interaktiv genomgång med 3D-illustrationer
- MIT 18.02SC: Gradient, Directional Derivative, Tangent Plane — föreläsningsanteckningar och övningsuppgifter

Illustrationer



Gradient



Gradientvandring

Föreläsningsanteckningar

> Från föreläsning: 2026-04-10, M0068M Föreläsare: Stephen McCormick

2026-04-10 – Föreläsning 8 (Riktningsderivata och Taylorpolynom)

Riktningsderivata

Syfte: Generalisera partiella derivator till derivata i godtycklig riktning. Partiella derivator mäter förändring längs koordinataxlarna (x, y, z), men riktningsderivatan ger förändringen i en helt annan riktning.

Givet $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Gradienten: $\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$

För en enhetsvektor $\hat{u}$ med $||\hat{u}|| = 1$: $D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$

Krav $||\hat{u}|| = 1$: Riktningsderivatan mäter förändring per längdenhet.

Vilket $\hat{u}$ maximerar $D_{\hat{u}} f$? $D_{\hat{u}} f = |\vec{\nabla} f| \cos \theta$

Maximum när $\theta = 0$ (dvs $\hat{u}$ pekar i samma riktning som $\vec{\nabla} f$).

Slutsats:

- $\vec{\nabla} f$ → riktning där f ökar snabbast
- $|\vec{\nabla} f|$ → maximal ändringstakt
- $-\vec{\nabla} f$ → riktning där f minskar snabbast
- $\vec{\nabla} f$ är normalvektor till nivåytan $f(x, y, z) = \text{konst}$

Exempel: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (kon). Nivåkurvan $f = c$ är cirklar. Gradienten pekar radiellt utåt – vinkelrätt mot cirklarna.

Taylorpolynom i flera variabler

Syfte: Approximera funktioner kring en punkt med polynom. Idén är att reducera till envariabelfallet via en hjälpfunktion.

Låt $\vec{a} = (a, b)$, $\vec{h} = (h, k)$. Definiera: $F(t) = f(\vec{a} + t\vec{h}) = f(a + th, b + tk)$

Då är $F(0) = f(\vec{a})$ och $F(1) = f(\vec{a} + \vec{h})$.

Taylor-expansion av $F(t)$ kring $t = 0$ ger Taylorpolynomet för f kring $\vec{a}$: $F'(t) = \vec{\nabla} f(\vec{a} + t\vec{h}) \cdot \vec{h}$