

Greens sats

Jun 23, 2026, 7 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Kurvintegraler av vektorfält, Dubbelintegraler

1. Idén bakom satsen

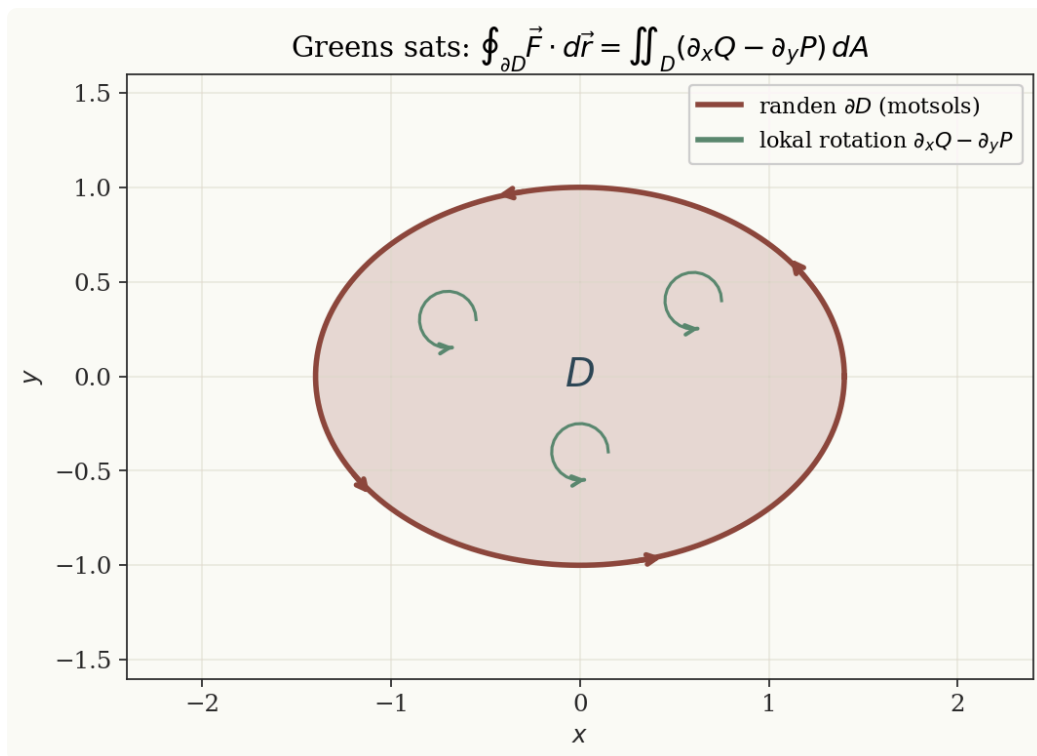
Det finns två naturliga sätt att mäta vad ett vektorfält \vec{F} "gör" över ett område $D \subset \mathbb{R}^2$:

- **Längs randen:** kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ summerar fältets komponent längs $C = \partial D$ – cirkulationen.
- **Inne i området:** dubbelintegralen av en lokal "swirl-täthet" $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ summerar hur mycket fältet snurrar i varje punkt.

Greens sats säger att dessa två storheter är *samma sak*. Det är 2D-versionen av Stokes sats.

Grundtanken

Det som händer på randen kan räknas ut genom att summera något lokalt inne i D – och tvärtom. Ett globalt randvärde är samma sak som en lokal täthet integrerad över området.



2. Satsen

För ett vektorfält $\vec{F} = (P, Q)$ som är C^1 på en omgivning av D , och en positivt orienterad styckevis C^1 -rand $C = \partial D$:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Positiv orientering

“Positivt orienterad” betyder att C traverseras motsols, så att D ligger till *vänster* när man rör sig längs randen. Vänd man riktningen byter både sidorna tecken samtidigt – likheten gäller fortfarande.

\vec{F} måste vara definierat överallt i D

Om \vec{F} har en singularitet inne i D – t.ex. blir oändlig i en punkt – gäller satsen *inte* direkt. Då måste man skära ut singulariteten, vilket ger en korrektionsterm. Se

3. Lokal tolkning – curlen som cirkulationstäthet

Varför ser integranden i högerled ut just så? En kort heuristik: betrakta en mycket liten rektangel R med hörn i (x, y) och sidor $\Delta x, \Delta y$. Cirkulationen längs randen ∂R , taget motsols, blir efter linjär approximation

$$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.$$

Det är därför integranden i Greens sats är just denna kombination – den mäter cirkulation per ytenhet i punkten.

Bygger man upp D av massor av små rektanglar och summerar cirkulationen längs allas ränder, så *kancellerar* alla inre kanter (varje inre kant traverseras en gång i varje riktning av två grannrektanglar). Bara den yttre randen C överlever, och man får

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{\text{rektanglar}} \oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Mnemonic

Tänk på $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ som "swirl-tätheten" i en punkt. Greens sats säger: *summa av lokal swirl = total cirkulation kring randen.*

4. Kopplingen till curl

På svenska är det $rot(\vec{F}) =$ "rotationen av \vec{F} "

Integranden i högerled är exakt \hat{k} -komponenten av **curlen** $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ när \vec{F} ses som ett 3D-fält $(P, Q, 0)$:

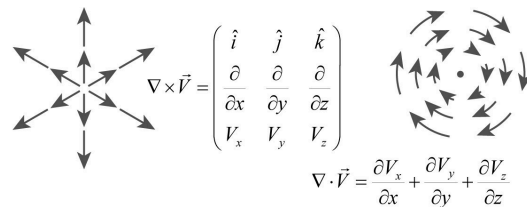
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Med $F_3 = 0$ försvinner \hat{i} - och \hat{j} -komponenterna och kvar blir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Swirliness är trademark av Stephan.

VECTOR REVIEW: DIVERGENCE & CURL OF A VECTOR FIELD



Greens sats kan därför skrivas

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} dA,$$

vilket är precis hur 3D-versionen (**Stokes sats**) ser ut för en plan yta i xy -planet.

5. Specialfall – area

Sätt $P = -y/2$, $Q = x/2$. Då blir integranden

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

så dubbelintegralen reduceras till arean. Det ger

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

dvs. arean av D läses av direkt från en kurvintegral längs randen.

☰ Exempel – arean av en ellips via Greens sats >

6. Exempel

☰ Exempel 1 – verifiera Greens sats för $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$ >

☰ Exempel 2 – när det är *enklare* att gå via Greens sats >

☰ Exempel 3 – virvelfältet, och varför singulariteten spelar roll >

☰ Exempel 4 – polära koordinater >

☰ Exempel 5 – triangelområde, tre rätlinjiga sidor >

7. Strategi

🔗 När är Greens sats användbart?

Använd Greens sats när:

- Kurvintegralen är besvärlig att parametrisera direkt, men $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ är *enkel* (Exempel 2).
- Området D är geometriskt enkelt så att dubbelintegralen blir rättfram.
- Du vill räkna en *area* från en parametrisering av randen (specialfallet i §5).

Använd den *omvända* riktningen – kurvintegral istället för dubbelintegral – när:

- Dubbelintegralen ser jobbig ut men randen är enkelt parametriserbar.

Och kontrollera alltid att \vec{F} är C^1 på hela D . Singulariteter kräver särbehandling (Exempel 3).

8. Sammanfattning

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Specialfall	Val av (P, Q)	Resultat
Allmänt	godtyckliga C^1 -funktioner	cirkulation = curl-integral
Area	$P = -y/2, Q = x/2$	$A = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx)$
Cirkulation av rotation	$P = -y, Q = x$	$\oint = 2 \cdot \text{area}(D)$

Läsning

- [17.3 Green's Theorem in the Plane](#)

Se även

- [Stokes sats](#)
- [Gauss sats](#)
- [Kurvintegraler av vektorfält](#)
- [Vektorfält](#)
- [Divergens och rotation](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Divergence and curl](#) — geometrisk intuition för curl och Greens sats.
 - [Khan Academy: Green's theorem](#)
 - [Wikipedia: Green's theorem](#)
-