Högre ordningens derivator

Jun 23, 2026, 4 min read

#flervariabelanalys #partiell-derivata

Högre ordningens derivator

> **Kapitel:** 13.4 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator

---

1. Notation för andraderivator

För en funktion $z = f(x, y)$ erhålls **fyra** andraderivator genom att derivera de partiella derivatorna f_1 och f_2 en gång till.

Indexnotation och Leibniz-notation

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}, \qquad f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}, \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Hur man läser Leibniz-notationen >

Notation som träd

Utgå från f, derivera m.a.p. x eller y i varje steg:

$$f \begin{cases} \xrightarrow{\partial_x} f_1 \begin{cases} \xrightarrow{\partial_x} f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \end{cases} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_2 \begin{cases} \xrightarrow{\partial_x} f_{21} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases} \end{cases}$$

Beräkna alla andraderivator för $f(x, y) = 2y^2 + x^3 \ln(xy)$ >

---

2. Symmetrisatsen (blandade derivatorna kommuterar)

Clairauts sats — blandade derivatorna kommuterar

Kom ihåg: Om f_{12} och f_{21} är **kontinuerliga** i en omgivning av (a, b) gäller: $\boxed{f_{12} = f_{21}}$ Ordningen spelar ingen roll. Används som **kontroll**: om $f_{12} \neq f_{21}$ i din beräkning har du räknat fel.

Satsen gäller inte alltid

Det finns funktioner där f_{12} och f_{21} **existerar** men inte är lika. Tillräckligt villkor: de blandade derivatorna är **kontinuerliga** i omgivningen av punkten.

Tre variabler

För $g(x, y, z)$ gäller på motsvarande sätt:

$$g_{13} = g_{31}$$

$$g_{123} = g_{321} = g_{213} = g_{132} = g_{312} = g_{231}$$

$$g_{112} = g_{121} = g_{211}$$

Indexen kan alltså **permuteras fritt** — ordningen är ej viktig (givet kontinuitet).

---

3. Laplaces ekvation

Många fysikaliska system beskrivs av den partiella differentialekvationen (**PDE**):

$$\boxed{f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0}$$

I Leibniz-notation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Denna PDE kallas **Laplaces ekvation** och betecknas ibland $\Delta f = 0$ (där Δ är Laplace-operatorn).

Fysikalisk tolkning — stationär temperaturfördelning

En **stationär (tidsoberoende) temperaturfördelning** $T = T(x, y, z)$ i ett material utan inre värmekällor uppfyller Laplaces ekvation. “Stationär” innebär att temperaturen är konstant i tid — värmeflöde sker, men ingen punkt värms upp eller kyls ned netto.

I allmänhet beror temperaturen på både position och tid: $T = f(x, y, z, t)$. I det stationära fallet faller tidberoendet bort.

---

4. Harmoniska funktioner

> **Definition:** En funktion f som uppfyller Laplaces ekvation i ett område Ω kallas **harmonisk** i Ω:
>
> $$f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0 \quad \text{i } \Omega$$

Var dyker harmoniska funktioner upp?

- **Värmeledning** — stationär temperaturfördelning utan värmekällor
- **Elektrostatik** — elektrisk potential V i vakuum uppfyller $\Delta V = 0$

- **Strömningslära** — strömningspotential för inkompressibel, rotationsfri strömning

2D-fallet

I två dimensioner lyder villkoret:

$$f_{11} + f_{22} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Visa att $T(x, y) = e^{3x}\sin(3y)$ är harmonisk

Läsning

- 2.6 Higher-Order Derivatives
- 13.4 Higher-Order Derivatives

Se även

- Partiella derivator
- Algebraiska egenskaper
- Kedjeregeln

Resurser

Videor

- Khan Academy: Second partial derivatives — genomgång av andraderivator steg för steg
- Khan Academy: Symmetry of second partial derivatives — Clairauts sats
- 3Blue1Brown: Laplace equations — geometrisk intuition för Laplaces ekvation

Wikipedia

- Partial derivative
- Symmetry of second derivatives (Clairaut's theorem)
- Laplace's equation
- Harmonic function

Fördjupning

- Paul's Online Math Notes — Higher Order Partial Derivatives

---

Föreläsningsanteckningar

> Från föreläsning: 2026-03-27, M0068M

2026-03-27 – Föreläsning 5 (Trevariabel, andraderivator, Laplaces ekvation)

Trevariabelfunktion

Exempel: $f(x, y, z) = \cos(xz) + xy^2z^2 = w \ \frac{\partial w}{\partial x} = -\sin(xz)z + y^2z^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2xyz^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\sin(xz)x + 2xy^2z$

Nivåyta

För trevariabelfunktioner $g(x, y, z) = C$ kan vi ej rita grafen i 3D, istället beskriver vi med nivåytor.

Differentialoperatorn $\frac{\partial}{\partial x}$ är en partiell derivatoperator m.a.p. x.

Notation för andraderivator (träd)

Andraderivatorerna $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ fås genom att derivera f_1 och f_2 igen.

Exempel: $z = f(x, y) = 2y^2 + x^3 \ln(xy)$

$f_1 = 3x^2 \ln(xy) + x^2, \quad f_2 = 4y + \frac{x^3}{y}$

$f_{11} = 6x \ln(xy) + 5x, \quad f_{12} = \frac{3x^2}{y} = f_{21}, \quad f_{22} = 4 - \frac{x^3}{y^2}$

Sats: Blandade derivatorna kommuterar: $f_{12} = f_{21}$ (man kan permutera dem fritt vid kontinuitet).

Fysikaliska modeller – Stationär temperaturfördelning

$T = f(x, y, z, t)$. Stationär (tidsoberoende) temperaturfördelning $T = f(x, y, z)$ uppfyller **Laplaces ekvation (PDE)**: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

Exempel 2D: $T = e^{3x} \sin(3y)$ uppfyller $T_{xx} + T_{yy} = 9e^{3x} \sin(3y) - 9e^{3x} \sin(3y) = 0$ ✓

Kontinuitet för tvåvariabelfunktioner

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

(Jämför envariabelfallet: gränsvärdet ska finnas och vara lika med funktionsvärdet.)
