

# Integraler

Jun 23, 2026, 4 min read

#envariabelanalys

#integral

#antiderivata

#riemannsumma

**Kurs:** M0065M, M0066M **Förkunskaper:** Gränsvärden och kontinuitet, Högre ordningens derivator

## 1. Grundidé

**Integralen** är ett centralt begrepp i analysen och kan tolkas på flera sätt:

- som **area** under en kurva,
- som en **gräns av summor** (Riemannsummor),
- som sambandet mellan en funktion och dess **antiderivata**.

Integraler används bland annat för att beräkna area, volym, arbete, massa och båglängd.

## 2. Bestämd och obestämd integral

### 2.1 Bestämd integral

Låt  $f(x)$  vara definierad på intervallet  $[a, b]$ . Den **bestämda integralen** definieras som

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

där  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  och  $x_k^*$  är en punkt i det  $k$ :te delintervallet.

 [Geometrisk tolkning](#)

Om  $f(x) \geq 0$  på  $[a, b]$  motsvarar  $\int_a^b f(x) dx$  arean mellan kurvan  $y = f(x)$  och  $x$ -axeln. Om kurvan ligger under  $x$ -axeln räknas bidraget negativt.

## 2.2 Obestämd integral

En funktion  $F(x)$  kallas **antiderivata** eller **primitiv funktion** till  $f(x)$  om

$$F'(x) = f(x).$$

Den obestämda integralen skrivs då som

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

där  $C \in \mathbb{R}$  är integrationskonstanten.

---

## 3. Analysens fundamentalsats

[i SATS: Analysens fundamentalsats, del 1 >](#)

[i SATS: Analysens fundamentalsats, del 2 >](#)

[Kärnidén](#)

Derivering och integrering är i den här meningen varandras inverser.

---

## 4. Räkner regler

[Konstant faktor >](#)

 [Summa och differens >](#)

 [Uppdelning av integrationsintervall >](#)

 [Omkastade gränser >](#)

 [Samma övre och undre gräns >](#)

## 5. Standardprimitiver


$f(x)$	$\int f(x) dx$	Villkor
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$x \neq 0$
$e^x$	$e^x + C$	
$e^{kx}$	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$	$k \neq 0$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\tan x$	$-\ln \cos x  + C$	$ \cos x  > 0$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$ x  < 1$

---

## 6. Vanliga integrationsmetoder

### 6.1 Variabelsubstitution

 [SATS: Substitutionsregeln](#) >

 [Exempel: substitution](#) >

### 6.2 Partiell integration

 [SATS: Partiell integration](#) >

 [Exempel: partiell integration](#) >

### 6.3 Partialbråksuppdelning

 [Metodidé](#) >

 [Exempel: partialbråk](#) >

---

## 7. Oegentliga integraler

### 7.1 Oändliga integrationsgränser

 [Definition](#) >

 [SATS:  \$p\$ -integralen >](#)

## 7.2 Obegränsad integrand

 [Definition >](#)

## 8. Vanliga tillämpningar

 [Area mellan två kurvor | >](#)

 [Rotationsvolym kring  \$x\$ -axeln >](#)

 [Båglängd | >](#)

 [Arbete med variabel kraft >](#)

## 9. Snabbreferens

Metod	När den passar
Direkt integration	När integranden finns i tabellen över standardprimitiver
Substitution	När uttrycket innehåller en sammansatt funktion
Partiell integration	Vid produkter som blir enklare efter derivering
Partialbråk	För rationella funktioner

---

## Läsning

- [Chapter 5 Integration](#)

## Se även

- [Gränsvärden och kontinuitet](#)
  - [Differentialekvationer](#)
  - [Rotation](#)
-