

Kryssprodukt

Jun 23, 2026, 7 min read

#linjär-algebra

#vektorrum

1. Kryssprodukt (vektorprodukt)

[3B1B: Cross products](#) · [3B1B: Cross products pt. 2](#)

Kryssprodukten finns enbart i \mathbb{R}^3 . Man kan se \mathbb{R}^2 som en delmängd av \mathbb{R}^3 genom att sätta $z = 0$, dvs. $(x, y, 0)$.

1.1 Syfte

Givet ett plan på parameterform $\vec{x} = \vec{x}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ ger kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ en normalvektor som är ortogonal mot båda riktningsektorerna.

1.2 Definition

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, \quad u_3v_1 - u_1v_3, \quad u_1v_2 - u_2v_1)$$

Minnesregel: Skriv upp vektorerna under varandra. För varje komponent, täck den kolonnen och ta korsvis multiplikation av de kvarvarande – byt tecken på mittkomponenten.

☰ **Beräkna** $(-1, 2, 3) \times (2, -6, 1)$ >

✎ **Alternativ metod – determinantformen** >

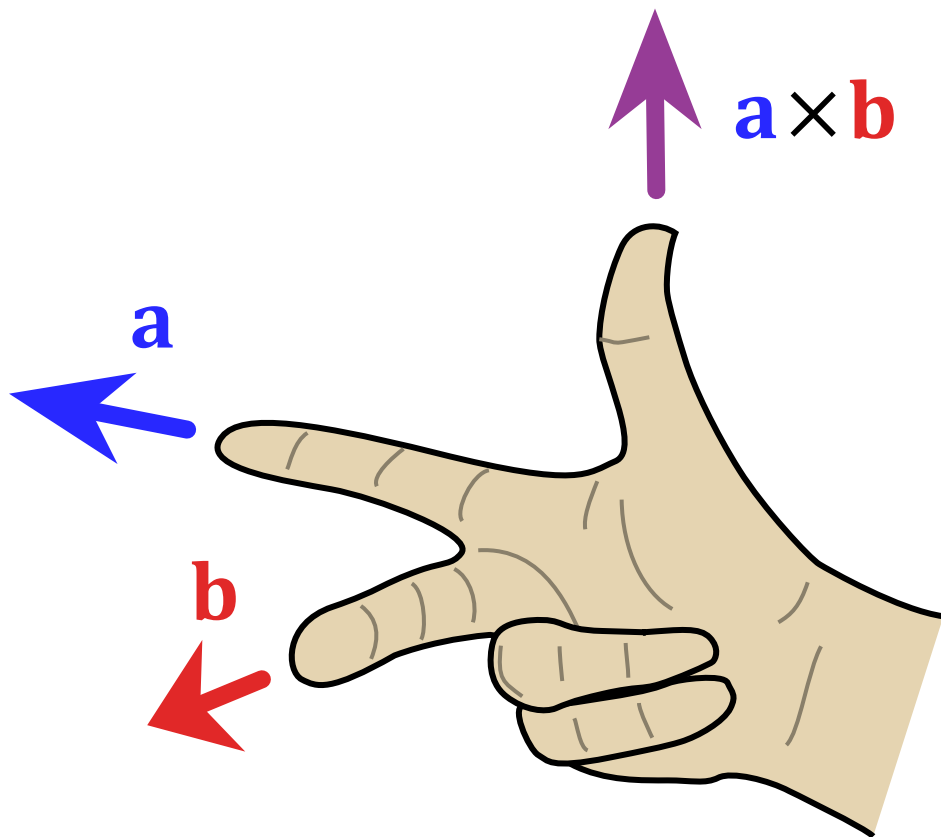
1.3 Sats

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \implies \vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v}) \text{ och } \vec{v} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$$

Bevis: $(u_1, u_2, u_3) \bullet (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0$

Varje term tar ut sig. Analogt för \vec{v} .

2. Räkner regler för kryssprodukt



Högerhandsregeln: Bilden illustrerar högerhandsregeln för kryssprodukt mellan två vektorer **a** och **b**. När du formar en högerhand som visas:

- **Pekfingret** (blå pil) pekar i riktning mot vektor **a**
- **Långfingret** (röd pil) pekar i riktning mot vektor **b**
- **Tummen** (lila pil) visar då riktningen på kryssproduktsvektorn **a × b**

Kryssproduktsvektorn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ blir alltså vinkelrät mot både \mathbf{a} och \mathbf{b} , och dess riktning bestäms av högerhandsregeln. Om du vänder på ordningen till $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ får du motsatt riktning (tummen pekar nedåt istället).

- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ – **ej kommutativ** (antikommutativ)
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ – distributiv
- $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

3. Lagranges identitet

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

4. Geometriska egenskaper

Givet två vektorer \vec{u} och \vec{v} :

- $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ och $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = arean av parallelogrammet
- Riktning enligt **högerhandsregeln**

5. Exempel: Area av triangel

Bestäm arean av triangeln med hörnen $A = (1, 0, 3)$, $B = (-2, 1, -1)$, $C = (1, 1, 2)$.

Lösning: $\vec{AB} = B - A = (-3, 1, -4)$ $\vec{AC} = C - A = (0, 1, -1)$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

6. Trippelskalärprodukt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Kan beräknas som en determinant:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

7. Satser: Geometrisk tolkning av determinanter

[3B1B: The determinant](#)

7.1 Area av parallelogram i \mathbb{R}^2

$$\text{Area} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

7.2 Volym av parallelepiped i \mathbb{R}^3

$$\text{Volym} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

8. Avstånd mellan punkt och linje

[☰ Exempel: Avstånd från punkt till linje >](#)

9. Avstånd mellan två skeva linjer i \mathbb{R}^3

Två linjer är **skeva** om de varken skär varandra eller är parallella (endast möjligt i 3D).

[☰ Exempel: Avstånd mellan två skeva linjer >](#)

10. Avstånd mellan punkt och plan

☰ [Exempel: Plan genom tre punkter + avstånd](#) >

Kryssprodukt - Jämn permutation

Läsning

- [10.3 The Cross Product in 3-Space](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Cross products \(kap 10\)](#) [↗](#) — vad kryssprodukten betyder geometriskt
- [3Blue1Brown: Cross products in the light of linear transformations \(kap 11\)](#) [↗](#) — djupare förståelse via determinanter
- [3Blue1Brown: Dot products and duality \(kap 9\)](#) [↗](#) — skalärprodukt som kontrast
- [3Blue1Brown: The determinant \(kap 6\)](#) [↗](#) — area och volym som determinant

Interaktiva verktyg

- [GeoGebra: Cross Product Visualisation 3D](#) — roterbar 3D-visualisering
- [GeoGebra: Cross Product and Area Visualization](#) — parallelogram-area

Wikipedia

- [Cross product](#) [↗](#)
- [Triple product](#) [↗](#)
- [Parallelepiped](#) [↗](#)
- [Line \(geometry\) — Parametric form](#) [↗](#)
- [Plane \(geometry\)](#) [↗](#)

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 2: Vectors](#)
-