

# Kurvintegraler av vektorfält

Jun 23, 2026, 2 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#vektoranalys

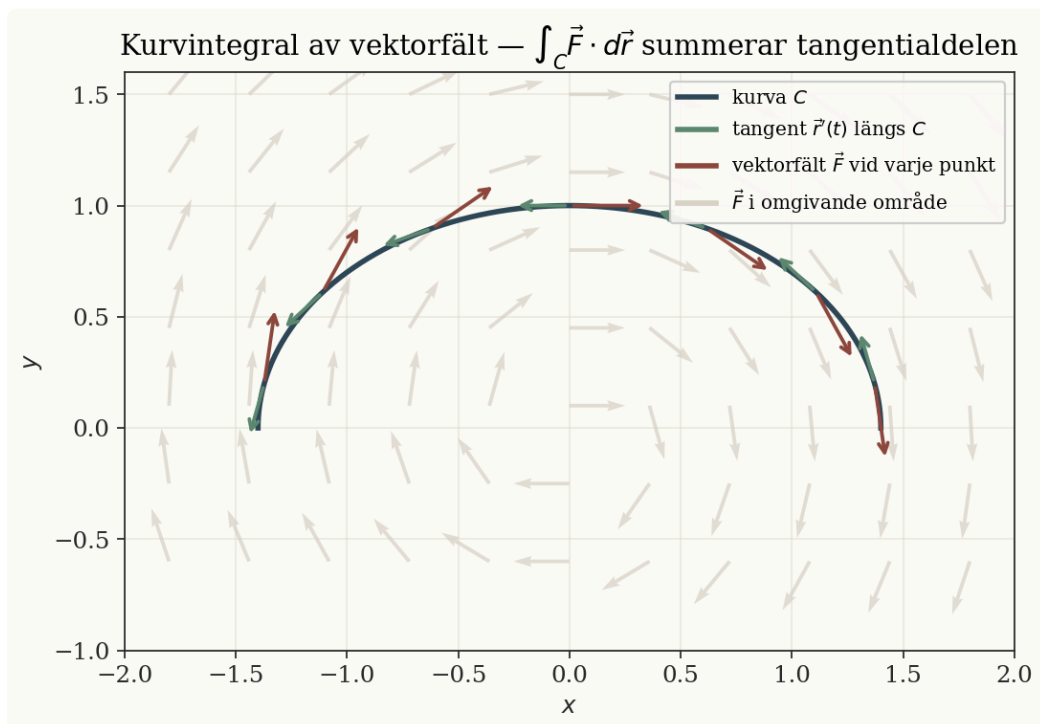
Kurs: M0068M Förkunskaper: Vektorfält, Parametriserade kurvor

## 1. Definition

För ett vektorfält  $\vec{F}$  längs en orienterad kurva  $C : \vec{r}(t), t \in [a, b]$  definieras

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Tolkningen är *arbetet* utfört av kraftfältet längs kurvan.



### ☰ Intuitivt exempel – fisken i strömmen

Tänk dig ett vektorfält som beskriver vattnets flöde i en å, och en fisk som rör sig i vattnet. Fisken följer inte strömmen utan tar sin egen väg. Vi vill veta arbetet  $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{x}$ , men kraftens riktning och rörelseriktningen sammanfaller inte. Lösningen är att projicera kraftvektorn på rörelseriktningen,

$$W = |\vec{F}_{\parallel}| |\vec{x}| = |\vec{F}| |\vec{x}| \cos \theta,$$

och i kontinuerlig form (efter Stephans välkända “magic”):

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_C F_1 dx + \int_C F_2 dy.$$

Med

- $\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ ,
- $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$ ,

följer

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$

---

## 2. Beräkningsexempel – vägberoende

Låt  $\vec{F} = y^2 \hat{i} + 2xy \hat{j} = \begin{bmatrix} y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$  och beräkna  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs tre olika vägar från  $(0, 0)$  till  $(1, 1)$ :

1.  $C$ : räta linjen  $y = x$  (enklast, enligt Stephan).
2.  $C$ : parabeln  $y = x^2$ .
3.  $C$ : två räta linjesegment, först  $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$ , sedan  $(0, 1) \rightarrow (1, 1)$ .

### 3. Oberoende av väg

Om  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$  – alltså om fältet är *konservativt* (se **Vektorfält**) – gäller

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

och integralen är **oberoende av vägen** mellan ändpunkterna. Som specialfall blir kurvintegralen längs varje sluten kurva noll.

### Läsning

- **16.4 Line Integrals of Vector Fields**

### Se även

- **Vektorfält**
  - **Greens sats**
  - **Kurvintegraler**
-