

Kurvintegraler

Jun 23, 2026, 3 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#integral

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Parametriserade kurvor, Integraler

1. Idén bakom kurvintegralen

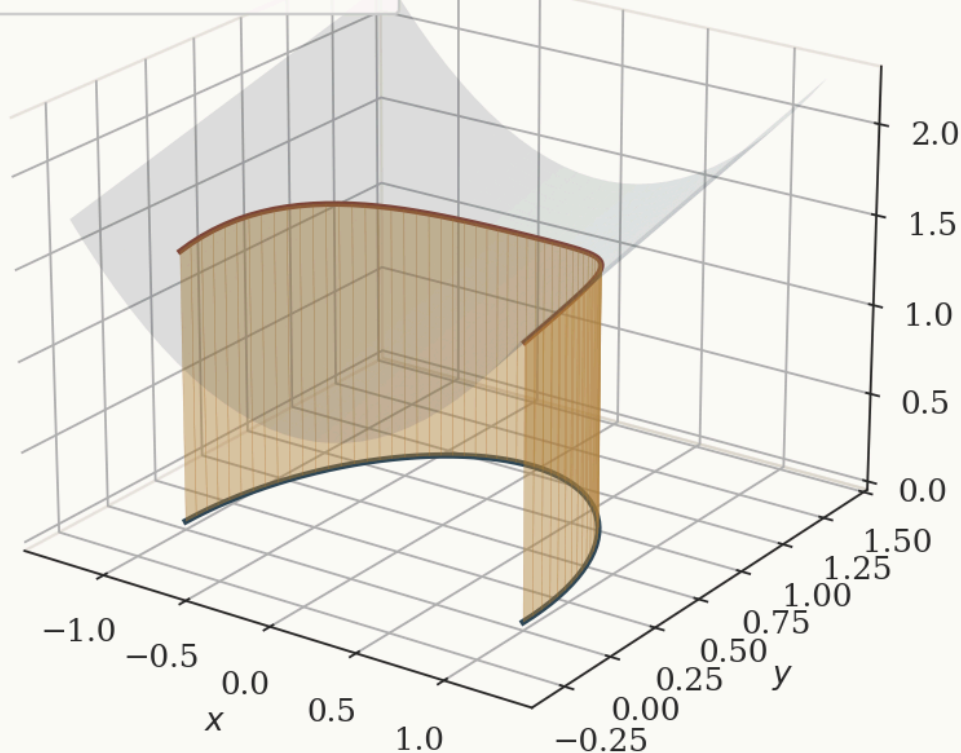
Vanliga integraler $\int_a^b f(x) dx$ summerar funktionsvärden längs ett rakt intervall på reella linjen. *Kurvintegralen* generaliserar detta till en *krokig väg* i planet eller rummet.

Grundtanken

Tänk dig en böjd vajer som följer en kurva C , och en densitet $f(x, y)$ som varierar längs vajern. Massan blir summan av “lite längd \times lokal densitet” – och det är precis $\int_C f ds$.

$\int_C f ds$ — arean av gardinen under $z = f(x, y)$

- kurva C i xy -planet
- höjdkurvan $z = f(\vec{r}(t))$
- 'gardin' med arean $\int_C f ds$



2. Definition

För en kurva $C : \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, och en skalärfunktion f definierad på C :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

där ds är ett båglängdselement.

Härledning av ds

En liten bit av kurvan motsvarar ett litet steg Δt i parametern. Pythagoras längs kurvan ger

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \boxed{\|\vec{r}'(t)\| dt}$$

dvs. båglängdselementet är *farten* i parametreringen, gånger dt .

3D-fall

Allt fungerar likadant i \mathbb{R}^3 med $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$.

3. Oberoende av parametrisering

Resultatet beror endast på kurvan som *geometriskt objekt*, inte på hur den parametreras. Att byta parameter $t \rightarrow \tau(t)$ med $\tau'(t) > 0$ ger samma värde, så länge orientering och spår bevaras.

Praktisk konsekvens

Välj den parametrisering som ger snyggast räkning – du behöver inte oroa dig för att svaret ska bero på valet.

4. Användning

- **Längd** av kurva: $f \equiv 1$ ger $\int_C ds = \text{längd}(C)$.
- **Massa** av tråd med (linjär) densitet $\rho(x, y)$: $m = \int_C \rho ds$.
- **Masscentrum** av tråden: $\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho ds$ etc.
- **Medelvärde** av f längs kurvan: $\bar{f} = \frac{1}{\text{längd}(C)} \int_C f ds$.

5. Exempel

 [Exempel 1 – längden av en halvcirkel \(sanity check\) >](#)

☰ Exempel 2 – massa av vajer med inhomogen densitet >

☰ Exempel 3 – medelvärde av höjd över en spiral >

6. Metodik – steg för steg

🔗 Hur man räknar $\int_C f ds$

1. **Parametrisera kurvan** C med $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Välj den parametrisering som gör räkningarna minst smärtsamma.
2. **Räkna farten** $\|\vec{r}'(t)\|$.
3. **Uttryck integranden** f längs kurvan: $f(\vec{r}(t))$.
4. **Beräkna enkelintegralen** $\int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$.
5. **Sanity-check.** För $f \equiv 1$ ska du få längden av C .

⚠ Vanliga fallgropar

- Glömt $\|\vec{r}'(t)\|$ – utan den blir resultatet fel storleksordning.
- Felaktig t -intervall som täcker kurvan flera gånger eller bara delvis.
- Räknat $\int f(t) dt$ istället för $\int f(\vec{r}(t)) ds$ – funktionsvärdet *i punkten*, inte i parametern.

Läsning



- 16.3 Line Integrals

Se även

- Kurvintegraler av vektorfält
- Parametriserade kurvor

- [Båglängd och rotationsarea](#)

Resurser

- [Khan Academy: Line integrals](#) 
 - [Wikipedia: Line integral](#) 
-