

Lagranges multiplikatorometod

Jun 23, 2026, 7 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#optimering

#gradient

Kapitel: 14.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Gradient och riktningsderivata, Kritiska punkter, Extremvärdesproblem, Nivåkurvor och ytor

1. Problemet – optimering under bivillkor

Vi vill bestämma största och minsta värde av

$$f(x, y) \quad \text{under bivillkoret} \quad g(x, y) = 0.$$

Geometriskt: vi letar **extremvärden** av f enbart bland de punkter som ligger på kurvan $g = 0$, inte i hela planet. Samma princip gäller i tre eller fler variabler, där $g(x, y, z) = 0$ skär ut en yta istället för en kurva.

📍 Var dyker bivillkor upp?

- Största/minsta avstånd från origo till en kurva eller yta.
- Randundersökning i **Extremvärdesproblem** på kompakta områden.
- Fysik: optimera energi/verkningsgrad under en bevarandelag.
- Ekonomi: maximera nytta under en budgetrestriktion.

2. Geometrisk idé – tangerande **nivåkurvor**

Betrakta nivåkurvorna $f = c$ för olika c och bivillkoret $g = 0$. När c ändras glider f -kurvan genom planet. Extremvärden på bivillkoret inträffar i just de punkter där nivåkurvan $f = c^*$ **tangerar** kurvan $g = 0$.

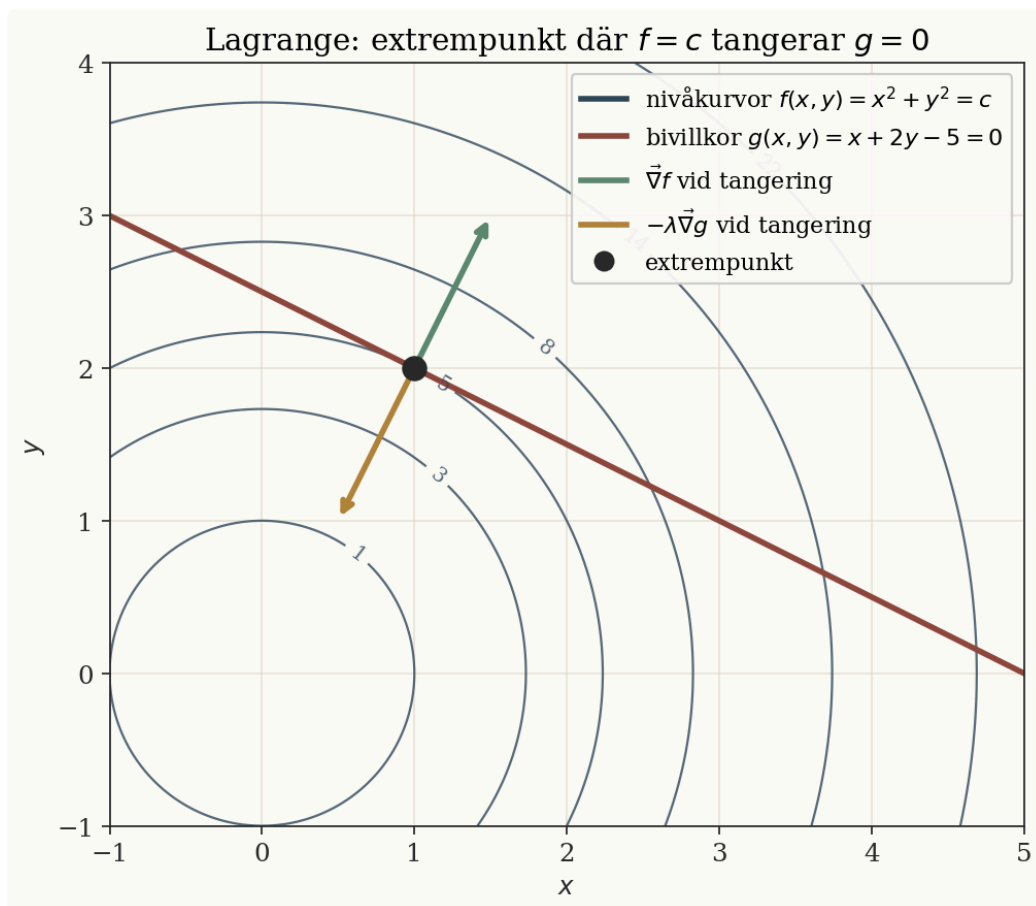
I en tangeringspunkt är kurvornas normalvektorer parallella. Eftersom gradienten är normal till en nivåkurva ger det:

$$\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$$

för något tal $\lambda \in \mathbb{R}$. Talet λ kallas **Lagrangemultiplikator**. Tecknet är bara konvention – det viktiga är att gradienterna är parallella.

🔗 Intuition

Skulle gradienterna inte vara parallella, finns en komponent av $\vec{\nabla} f$ längs bivillkoret. Då kan man röra sig på $g = 0$ och öka (eller minska) f . Alltså kan ingen extrempunkt ligga där.



Nivåkurvor till f tangerar bivillkoret $g = 0$ i extrempunkten – där är $\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$.

3. Lagrangefunktionen

Introducera hjälpfunktionen

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Det nödvändiga villkoret ovan kan då skrivas kompakt som

$$\vec{\nabla} \mathcal{L} = \vec{0} \iff \begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x + \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y + \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = g(x, y) = 0. \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger **stationaritetsvillkoret** ($\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$), den tredje ger själva **bivillkoret** ($g = 0$).

Generalisering till tre variabler

För $f(x, y, z)$ under bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ ser det likadant ut:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f + \lambda g, \quad \vec{\nabla} \mathcal{L} = \vec{0}.$$

4. Determinantformen (utan λ)

Parallellitetsvillkoret $\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$ i två variabler kan uttryckas utan att införa λ :

$$\det \begin{bmatrix} \vec{\nabla} f & \vec{\nabla} g \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0.$$

Tillsammans med $g = 0$ får man ett system i bara (x, y) – praktiskt när λ inte är intressant i sig.

5. Metod – steg för steg

Recept

För att hitta extremvärden av f under bivillkoret $g = 0$:

1. Ställ upp $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f + \lambda g$.
2. Sätt upp systemet $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_\lambda = 0$.
3. Lös systemet. Standardknep: bryt ut λ ur de två första ekvationerna och sätt uttrycken lika. Var noga med villkor när du dividerar.
4. Kontrollera specialfall separat – t.ex. där variabler är 0, eller där $\vec{\nabla}g = \vec{0}$ (singulär punkt på bivillkoret).
5. Beräkna f i alla kandidatpunkter och jämför.

⚠ Vanliga fallgropar

- **Division utan villkor.** När du delar med en variabel, glöm inte att kontrollera fallet då den är 0.
- **Ej kompakt bivillkor.** Om $g = 0$ inte är begränsat behöver max/min inte existera – argumentera först för att de gör det.
- **Singulära punkter.** Om $\vec{\nabla}g(p) = \vec{0}$ kan p vara en extrempunkt utan att uppfylla Lagranges ekvationer.
- **Lagrange räcker inte för ojämlikhet.** För $g \leq 0$ (kompakt område) måste man även undersöka det inre – se [Extremvärdesproblem](#).

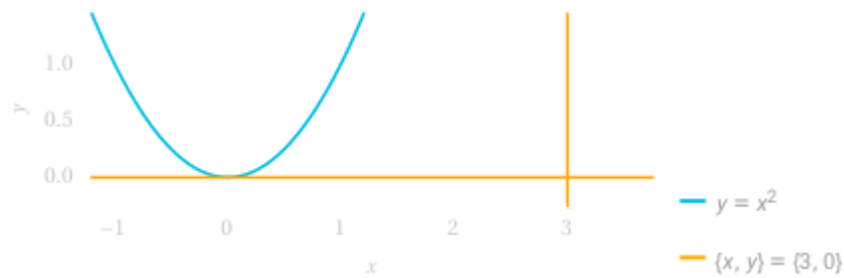
6. Exempel

☰ Exempel 1 – Avstånd från origo till en linje >

☰ Exempel 2 – Punkter på en ellips närmast och längst från origo >

☰ Exempel 3 – Extremvärden på en sfär >

Hitta kortaste distansen från $(3, 0)$ till $y = x^2$
 $f(x, y) = \text{dist}^2 = (x - 3)^2 + y^2$ $g(x, y) = y - x^2$



$$\mathcal{L}(x, y) = \vec{0}$$

7. Sammanhang med randundersökning

Lagranges metod är precis det man gör när man undersöker **randen** i ett **Extremvärdesproblem** på ett kompakt område $K = \{g \leq 0\}$:

1. Kritiska inre punkter: $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ inuti K .
2. Singulära inre punkter.
3. **Rand** $g = 0$: Lagranges multiplikatormetod (eller parametrisering).

Jämför alla kandidatvärden — störst är max, minst är min.

Läsning

- [14.3 Lagrange Multipliers](#)
- [14.4 Lagrange Multipliers in n-Space](#)

Se även

- [Gradient och riktningsderivata](#)
 - [Kritiska punkter](#)
 - [Extremvärdesproblem](#)
 - [Nivåkurvor och ytor](#)
 - [Kvadratisk form](#)
-

Resurser

Videos

- [3Blue1Brown / Khan Academy: Lagrange multipliers, using tangency to solve constrained optimization](#)
- [Khan Academy: Lagrange multipliers introduction](#)

Wikipedia

- [Lagrange multiplier](#)

Kurslitteratur

- Adams — 14.3 Lagrange Multipliers
-