# Linjära avbildningar

Jun 23, 2026, 6 min read

#linjär-algebra #linjär-avbildning #matris

> **Kapitel:** 1.8–1.9 · **Ämne:** Linjär algebra **Förkunskaper:** Matrisinvers, Matriser

---

## 1. Utökad sats för inverterbara matriser

### Sats (TFAE för $n \times n$ matris)

Följande är ekvivalenta:

1. $A$ är inverterbar
2. $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ har lösning för varje $\vec{b}$
4. $A\vec{x} = \vec{b}$ har **precis en** lösning för varje $\vec{b}$

### Höger- och vänsterinvers

För $n \times n$ matriser $A, B, C$:

- $AC = I \Rightarrow A^{-1} = C$ (högerinvers)
- $BA = I \Rightarrow A^{-1} = B$ (vänsterinvers)

---

## 2. Linjära avbildningar

> 3B1B: Linear transformations and matrices

### 2.1 Definition

En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en **linjär avbildning** om:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{T} A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

Vi skriver $T = T_A$ där $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

### 2.2 Egenskaper

| Egenskap | Definition |
|---|---|
| **Additiv** | $T_A(\vec{x} + \vec{y}) = T_A(\vec{x}) + T_A(\vec{y})$ |
| **Homogen** | $T_A(c\vec{x}) = cT_A(\vec{x})$ |
| **Linjär** | $T_A(c\vec{x} + d\vec{y}) = cT(\vec{x}) + dT(\vec{y})$ |

---

## 3. Fundamental sats

### 3.1 Sats

En avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en matrisavbildning (dvs. $T = T_A$ för någon matris $A$) om och endast om:

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ (additiv)
2. $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$ (homogen)

$$\boxed{\text{Linjär} \iff \text{Matrisavbildning}}$$

### 3.2 Sats: Unikhet

Om $T_A(\vec{x}) = T_B(\vec{x})$ för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, då är $A = B$.

---

## 4. Standardbasvektorer och standardmatrisen

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Definition:** Standardmatrisen för en linjär avbildning $T$ är:

$$\boxed{A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \cdots \quad T(\vec{e}_n)]}$$

där $\vec{e}_i$ är standardbasvektorerna.

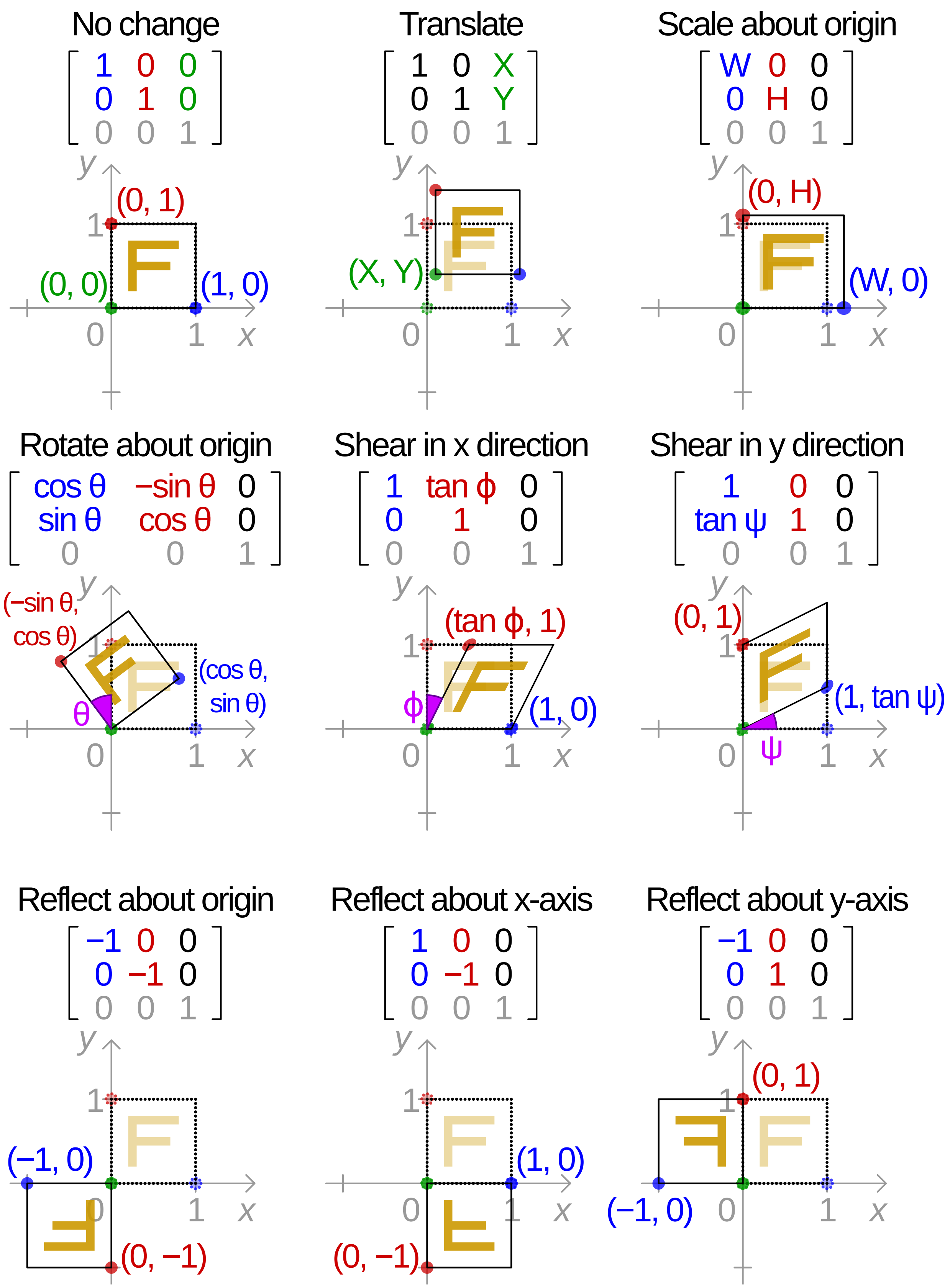
Bestäm standardmatrisen

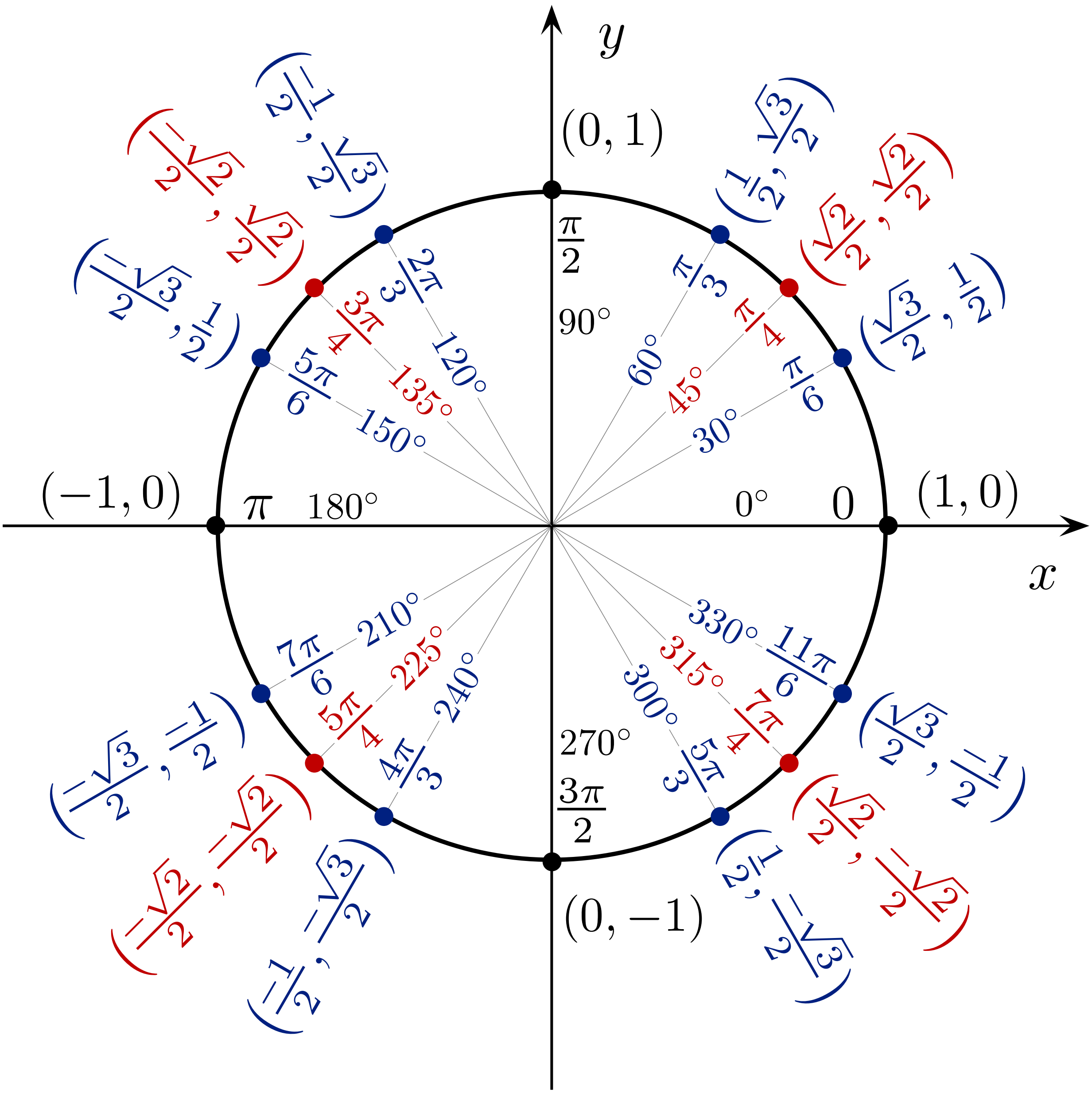
## 5. Två typer av uppgifter

| Fråga | Beskrivning |
|---|---|
| ”På vad avbildas $\vec{v}$?” | Beräkna $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ |
| “Vad avbildas på $\vec{w}$?” | Lös $A\vec{x} = \vec{w}$ |

## 6. Linjära operatorer i $\mathbb{R}^2$

> 3B1B: Linear transformations · interaktiv GeoGebra


No change
1 0 0
0 1 0
0 0 1
(0, 1)
(0, 0)
(1, 0)
Translate
1 0 X
0 1 Y
0 0 1
(X, Y)
Scale about origin
W 0 0
0 H 0
0 0 1
(0, H)
(W, 0)
Rotate about origin
cos θ −sin θ 0
sin θ cos θ 0
0 0 1
(−sin θ, cos θ)
(cos θ, sin θ)
θ
Shear in x direction
1 tan ϕ 0
0 1 0
0 0 1
(tan ϕ, 1)
(1, 0)
ϕ
Shear in y direction
1 0 0
tan ψ 1 0
0 0 1
(0, 1)
(1, tan ψ)
ψ
Reflect about origin
−1 0 0
0 −1 0
0 0 1
(−1, 0)
(0, −1)
Reflect about x-axis
1 0 0
0 −1 0
0 0 1
(1, 0)
(0, −1)
Reflect about y-axis
−1 0 0
0 1 0
0 0 1
(0, 1)
(−1, 0)
x
y
0
1




### 6.1 Spegling

**Spegling genom en linje som går genom origo.**

**Tillvägagång:** Gå vinkelrätt mot speglingslinjen och gå lika långt åt andra hållet.

| Spegling | Matris |
|---|---|
| I x-axeln | $S = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ |

| Spegling | Matris |
|---|---|
| I y-axeln | $S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| I linjen $y = x$ | $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

Varför måste speglingslinjen gå genom origo? >

---

### 6.2 Projektion

**Ortogonal projektion på en linje genom origo.**

| Projektion | Matris |
|---|---|
| På x-axeln | $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| På y-axeln | $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| På linjen $y = x$ | $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ |

---

### 6.3 Rotation i $\mathbb{R}^2$

**Rotation moturs med vinkel $\theta$:**

$$\boxed{R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

**Härledning:**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$R_\theta(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

Använd additionsformlerna för att få rotationsmatrisen.

Rotation $\frac{\pi}{3}$: Vad avbildas på $(1, 2)$?

Rotation medurs

---

## 7. Sammansättningar av avbildningar

> 3B1B: Matrix multiplication as composition

### 7.1 Definition

Givet:

- $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Sammansättningen:

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x}))$$

### 7.2 Satser

**Sats 1:** Om $S$ och $T$ är linjära, så är $S \circ T$ linjär.

**Sats 2:** Om $S = S_A$ och $T = T_B$, så är:

$$\boxed{S \circ T = T_{AB}}$$

**Bevis:** $(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})) = S(B\vec{x}) = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$

**Formel:**

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

⚠ Matrismultiplikation är ej kommutativ ›

Kan man alltid gå tillbaka? ›

---

## 8. Inverser av linjära avbildningar

### Sats

$$\boxed{T_A^{-1} = T_{A^{-1}}}$$

**Bevis:**

$$T_{A^{-1}} \circ T_A(\vec{x}) = T_{A^{-1}}(A\vec{x}) = A^{-1}(A\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

Krav ›

---

## 9. Exempel: Sammansatt avbildning

Rotation följt av spegling ›

---

## 10. Kvadrater av operatorer

| Operator | Beräkning | Resultat |
|---|---|---|
| Spegling $S$ (i $y = x$) | $S^2 = S \circ S$ | $S^2 = I$ |
| Projektion $P$ (på $y = x$) | $P^2 = P \circ P$ | $P^2 = P$ (idempotent) |

| Operator | Beräkning | Resultat |
|---|---|---|
| Rotation $R_\theta$ | $R_\theta^2 = R_\theta \circ R_\theta$ | $R_\theta^2 = R_{2\theta}$ |

Beräkningar >

## 11. Inverser av operatorer

| Operator | Invers | Kommentar |
|---|---|---|
| Spegling $S$ | $S^{-1} = S$ | Spegling är sin egen invers |
| Projektion $P$ | **Existerar ej** | Singulär matris |
| Rotation $R_\theta$ | $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ | Rotera tillbaka |

⚠ Varför är projektionsmatrisen ej inverterbar? >

## Resurser

### Videor

- 3Blue1Brown: Linear transformations and matrices (kap 3) — visuellt vad linjära avbildningar gör med rummet
- 3Blue1Brown: Matrix multiplication as composition (kap 4) — sammansättningar av avbildningar, hur sammansatta avbildningar motsvarar matrismultiplikation
- 3Blue1Brown: Three-dimensional linear transformations (kap 5) — avbildningar i 3D
- 3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space (kap 7) — inversa avbildningar, singulära matriser

## Interaktiva verktyg

GeoGebra: Matrix Transformations — applicera matriser på former, se rotation/spegling/skalning

GeoGebra: 2D Linear Transformations — dra basvektorer, se effekten

GeoGebra: Matrix Representation of Rotation — rotationsmatriser visualiserade

- Falstad: Matrix Simulation — interaktiv 2D-transformation med determinant och egenvärden
- MatVis — Interactive Matrix Visualization — inspirerad av 3B1B, sliders för matriskomponenter, egenvektorer
- Desmos: Linear Transformations

- Visualize It: Linear Transformations — skalning, rotation, skjuvning

### Wikipedia

- Linear map
- Transformation matrix
- Rotation matrix
- Projection (linear algebra)
- Function composition

### Fördjupning

- 3Blue1Brown: Lesson page — Linear transformations — interaktiva övningar
- 3Blue1Brown: Lesson page — Matrix multiplication — interaktiva övningar
- Georgia Tech: Interactive Linear Algebra — fri interaktiv lärobok

---