

Linjära ekvationssystem

Jun 23, 2026, 8 min read

#linjär-algebra

#matris

Linjära ekvationssystem

Antal obekanta	Linjära ekvation	Linjärt uttryck
1	$3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$	$3x$
2	$3x + 5 = 2y$	$5x - y$
3	$8x + 2y - z = 0$	$8x + 2y - z$
x_1, \dots, x_n obekanta	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots +$ $a_nx_n = b$	$a_1x_1 + a_2x_2 +$ $\dots + a_nx_n$

(a_1, \dots, a_n, b är givna reella tal)

Sats för linjära ekvationssystem

Antalet lösningar är alltid 0, 1, eller ∞

☰ En lösning – linjerna skär varandra >

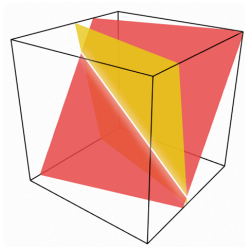
☰ Ingen lösning – parallella linjer >

☰ Oändligt många lösningar – samma linje >

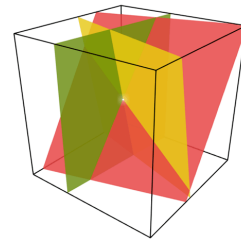
Geometrisk tolkning

I ett system av linjära ekvationer är lösningen de punkter som uppfyller **alla** ekvationer — dvs. skärningarna.

Antal ekvationer	Obekanta	Geometri	Lösning
2	2	Linjer i planet	Punkt (eller linje/tom)
2	3	Plan i rummet	Linje
3	3	Plan i rummet	Punkt



2 plan → skärning är en linje



3 plan → skärning är en punkt

Homogena system

Ett linjärt ekvationssystem är **homogent** om högerledet är noll i alla ekvationer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Egenskaper:

- Har alltid minst den **triviala lösningen**: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
- Om fria variabler finns → oändligt många lösningar
- Homogena system har **aldrig** exakt noll lösningar

Observation

Ett homogent system med fler obekanta än ekvationer har alltid oändligt många lösningar (icke-triviala lösningar finns).

Klammernotation

Denna notation är vanlig:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Men det finns effektivare notation: **matriser**. Syftet med matrisform är att det gör det möjligt (lättare) att tillämpa **Linjära ekvationssystem**.

Från klammernotation till matrisnotation

Ett linjärt ekvationssystem kan skrivas om till **utökad koefficientmatris**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \implies \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Tillvägagångssätt

1. **Koefficienter** till vänster om strecket
2. **Högerled** (b -värden) till höger om strecket
3. Varje **rad** motsvarar en ekvation
4. Varje **kolonn** (före strecket) motsvarar en obekant

Exempel med tre obekanta

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Allmänt

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\implies \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$


Lösningsfall vid Gausselimination

Fall	Kännetecken	Antal lösningar
Ingen lösning	Rad: $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ b]$	b där $b \neq 0$
Unik lösning	Lika många pivoter som obekanta	1
Oändligt många	Fria variabler finns (och konsistent)	∞

Se även

- [Linjära ekvationssystem](#)
 - [Matriser](#)
-

Resurser

- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#)  GeoGebra: System of Linear Equations — grafisk lösning av 2×2 -system



Gausselimination

1. Bundna och fria variabler

[3B1B: Inverse matrices, column space, null space](#)

Om lösning finns för alla värden av en variabel t så är t en **fri** variabel, medan resten är **bundna**.

☰ **Exempel: Lösningen** $(5 - t, 2 - t, t)$ >

2. Pivotelement

Definition: Det första nollskilda elementet på en rad kallas **pivotelement**. Om det är en etta kallas det en **ledande etta**.

I en matris markeras pivotelementet ofta med en ruta:

$$\boxed{1} \quad 1 \quad -3 \quad | \quad 4$$

Från ekvation till lösning

Givet $x + y + 3z = 4$ med x som pivotkolumn:

Sätt $z = s, y = t$ (fria variabler):

$$x = 4 - y - 3z = 4 - t - 3s$$

Lösningen:

$$(x, y, z) = (4 - t - 3s, t, s) = (4, 0, 0) + t(-1, 1, 0) + s(-3, 0, 1)$$

3. Trappstegsform (Echelon Form)

En matris är på **trappstegsform** om:

1. Nollraderna är samlade längst ned
2. Pivotelement i en rad är alltid till höger om pivotelementet i raden ovanför

[☰ Exempel på trappstegsform >](#)

4. Reducerad trappstegsform (Reduced Row Echelon Form)

En matris är på **reducerad trappstegsform** om:

1. Den är på trappstegsform
2. Alla pivoter är ettor
3. Varje pivot är det enda nollskilda elementet i sin kolumn

[☰ Exempel på reducerad trappstegsform >](#)

Sats

Varje matris är radekvivalent med minst en matris på trappstegsform och med **precis en** på reducerad trappstegsform.

5. Gausselimination – Exempel

[interaktiv GeoGebra](#) [↗](#)

[☰ Reducera till trappstegsform >](#)

6. Tolka lösningen

Variabeltyp	Beskrivning
Bunden	Tillhör en pivotkolumn, bestämd av de fria
Fri	Kan sättas till valfritt värde (s, t, u, \dots)

☰ [Exempel: Parametriserad lösning >](#)

Notation för fria variabler

Sätt fria variabler som: s, t, u, v, \dots

7. Homogena system

Om högerledet är noll i alla ekvationer i ett linjärt ekvationssystem är det **homogent**.

Då är alltid $\vec{x} = \vec{0}$ (triviala lösningen) en lösning:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0$$

8. Ekvationssystem med parameter

[interaktiv kalkylator](#)

☰ [Lös systemet beroende på parametern \$a\$ >](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#) [↗] – visar sambandet mellan pivoter, fria variabler och **nollrum**
- [3Blue1Brown: Nonsquare matrices \(kap 8\)](#) [↗] – hur rader/kolumner påverkar Lösningsrummet
- [MIT 18.06: Lecture 2 – Elimination with Matrices](#) [↗] – Gilbert Strangs klassiska föreläsning

Interaktiva verktyg

- [eMathHelp: Gauss-Jordan Calculator](#) [↗] – beräkna med visade steg
- [matrixcalc.org: System of Linear Equations](#) [↗]

Wikipedia

- [Gaussian elimination](#) [↗]
- [Row echelon form](#) [↗]

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra – Chapter 6: The Matrix](#) [↗] – interaktiv 3D-bok
 - [Georgia Tech: Interactive Linear Algebra](#) [↗] – fri interaktiv lärobok
-