

Masströghetsmoment

Jun 23, 2026, 11 min read

#fysik

#mekanik

#rotation

Kurs: F0006T **Förkunskaper:** Rotationsmekanik, Newtons lagar, Arbete och kinetisk energi

1. Idén bakom tröghetsmomentet

Newtons andra lag $\vec{F} = m\vec{a}$ säger oss att **massan** är ett mått på hur svår en kropp är att accelerera *translatoriskt*. När vi går över till **rotation** kring en axel behöver vi en motsvarande storhet – något som säger hur svår kroppen är att vinkelaccelerera. Det är **tröghetsmomentet** I .

Grundtanken

Tröghetsmomentet I förhåller sig till rotation precis som massan m förhåller sig till translation. Skillnaden är att I inte bara beror på *hur mycket* massa kroppen har, utan också på *var* massan sitter i förhållande till rotationsaxeln.

Det innebär två viktiga saker:

- En kropp har inte ett *enda* tröghetsmoment – det beror på vilken axel man väljer.
- Massa långt ifrån axeln “räknas” mer än massa nära axeln. Faktorn är kvadratisk: dubbelt avstånd ger fyra gånger så stort bidrag.

Två frågor som alltid måste besvaras först

1. Vilken axel arbetar vi med?
2. Vilken kropp / vilken massfördelning arbetar vi med?

Glömmer man någon av dessa blir tröghetsmomentet meningslöst – det är inte en egenskap hos kroppen ensam, utan hos *paret* (kropp, axel).

2. Härledning från rotationsenergi

Den naturligaste vägen in till I går via rörelseenergi för en stel kropp som roterar kring en fix axel.

Dela upp kroppen i små bitar med massor m_i på vinkelräta avstånd r_i från rotationsaxeln. Eftersom kroppen är *stel* har alla bitar samma vinkelhastighet ω . Den tangentiella farten för bit i är då

$$v_i = r_i \omega.$$

Bit i 's rörelseenergi är $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$. Summera över alla bitar:

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2.$$

Parentesen är en egenskap som *bara* beror på massfördelningen i förhållande till axeln – inte på rörelsen. Den får ett eget namn:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Med detta får rörelseenergin den kompakta formen

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

🔄 Direkt analogi

Jämför med translation: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2$. Bytet $m \rightarrow I$ och $v \rightarrow \omega$ ger rotationsversionen. Samma analogi fungerar för momentekvationen ($\vec{F} \rightarrow \vec{\tau}$, $m \rightarrow I$, $\vec{a} \rightarrow \vec{\alpha}$) – se **Momentekvationen**.

3. Tröghetsmoment för kontinuerliga kroppar

För en kontinuerlig kropp ersätter vi summan med en integral. Bidraget från ett masselement dm på avståndet r från axeln är $r^2 dm$, så

$$I = \int_{\text{kroppen}} r^2 dm$$

Vid **konstant densitet** ρ kan $dm = \rho dV$ flyttas in och ρ kan brytas ut:

$$I = \int_V \rho r^2 dV = \rho \int_V r^2 dV.$$

För kroppar med **plan symmetri** (skivor, ringar, stänger) reduceras volymsintegralen ofta till en enkel- eller dubbelintegral över genomskärningens area.

 **r är vinkelrätt avstånd till axeln**

Inte avstånd till origo, inte radievektorns längd. Det är specifikt det vinkelräta avståndet från masselementet till rotationsaxeln. För en stång som roterar kring sin egen längdaxel är r avståndet ut till stångens yta – *inte* längs stången.

4. Geometrisk tolkning

Eftersom bidraget från en bit massa skalar som r^2 är massa **långt från axeln** mycket viktigare än massa **nära axeln**. Det är hela poängen med tröghetsmomentet – och förklarar varför *samma kropp* med *samma massa* kan ha helt olika tröghetsmoment beroende på hur massan är fördelad.

 [Demo – två stänger med samma massa, olika fördelning >](#)

5. Steiners sats (parallellaxelsatsen)

Det är ofta enkelt att räkna ut tröghetsmomentet kring en axel **genom masscentrum**, men problemet ber oss om en *annan* parallell axel. Steiners sats är genvägen.

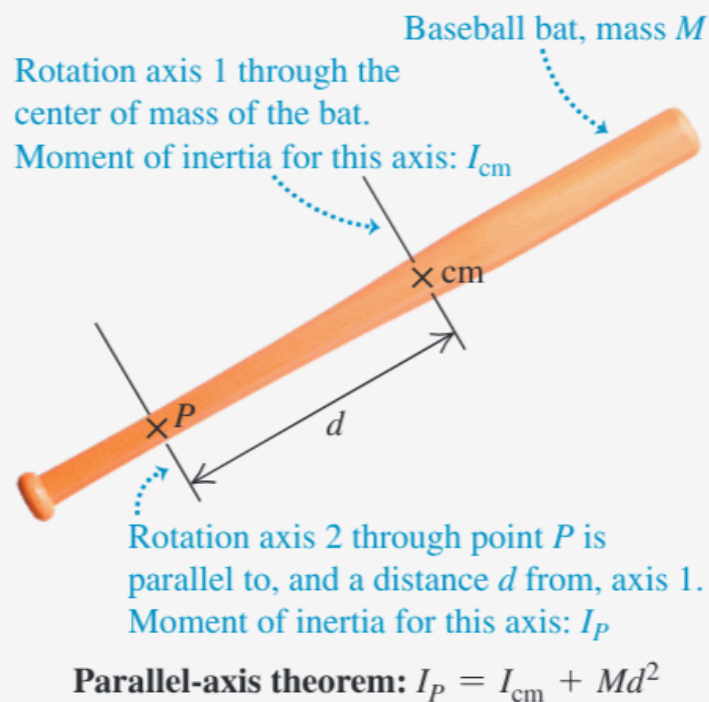
Steiners sats

Låt I_{cm} vara tröghetsmomentet kring en axel genom masscentrum, och låt P vara en *parallell* axel på avståndet d . Då är

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$$

där M är kroppens totala massa.

Figure 9.19 The parallel-axis theorem.



Två observationer:

1. **Bidraget Md^2 är alltid positivt.** Det betyder att I_{cm} är det *minsta* tröghetsmomentet för någon axel parallell med en given riktning – flytta axeln bort från cm och I kan bara öka.

2. **Satsen kräver att axlarna är parallella.** För roterade axlar krävs den fulla tröghetstensorn, vilket vi inte rör i den här kursen.

Praktisk användning

Steiners sats används typiskt åt två håll:

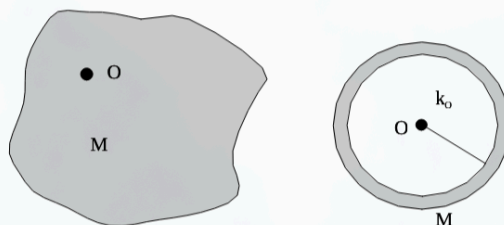
- **“Flytta in till cm.”** Du har I kring en kant och vill ha det kring cm: $I_{\text{cm}} = I_P - Md^2$.
- **“Flytta ut från cm.”** Du har I_{cm} från en tabell och vill ha I kring en lämplig kant eller momentancentrum: $I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$.

6. Tröghetsradie

Det är ofta praktiskt att rapportera tröghetsmomentet inte som en talvärde, utan som en *karaktäristisk längd* – den **tröghetsradie** k som en motsvarande tunn cylinderhylsa skulle behöva ha för att ge samma I :

$$I = Mk^2 \iff k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

M6.1 Tröghetsradie



Figur 6.1. Illustration av begreppet tröghetsradie

Tröghetsradien har dimensionen längd och säger något *geometriskt* om var massan sitter i förhållande till axeln. Den används flitigt i konstruktionssammanhang (svänghjul,

hjulupphängning) där man vill beskriva “hur fördelad” en kropps massa är utan att lista hela I :n.

7. Sammansatta kroppar

Eftersom tröghetsmomentet definieras som en integral är det **additivt** över rumsligt åtskilda delar. Är kroppen sammansatt av n delar med tröghetsmoment I_1, I_2, \dots, I_n kring *samma axel*, så är totala tröghetsmomentet

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Härledningen följer direkt från definitionen:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_{V_1} r^2 dm + \int_{V_2} r^2 dm + \dots$$

Två viktiga tekniker faller ut:

- **Subtraktionstrick.** Vill du beräkna I för en kropp med ett *hål*? Räkna I för den fulla kroppen och dra av I för det fiktiva fyllnadsmaterialet i hålet. Båda termerna kan tas från standardtabeller.
 - **Symmetrित्रick.** Är kroppen symmetrisk så att två delar bidrar lika mycket, räcker det att räkna ena halvan och dubbla.
-

8. Tunna skivor

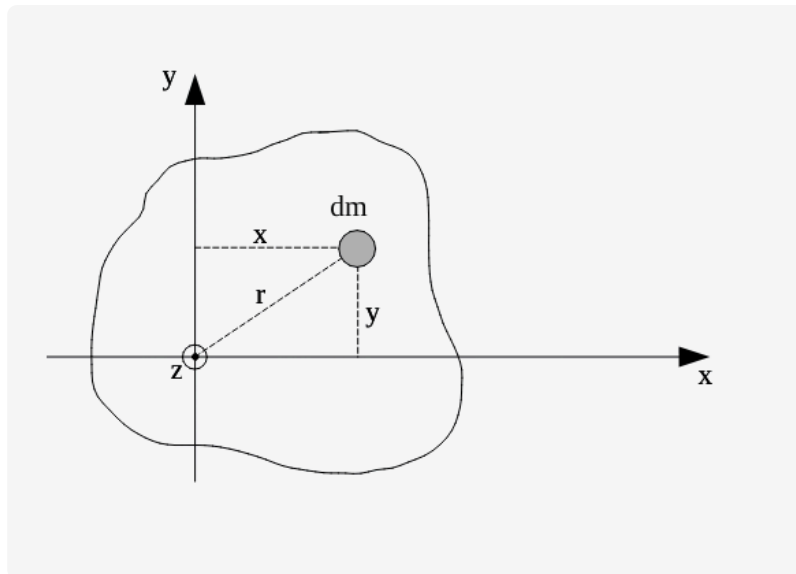
Tunna plana kroppar har en användbar specialregel: **vinkelaxelsatsen** (perpendicular axis theorem).

Vinkelaxelsatsen (endast plana kroppar)

Ligger kroppen i xy -planet och låter vi z -axeln vara vinkelrät mot planet, så är

$$I_z = I_x + I_y$$

där alla tre axlar går genom samma punkt.



Bevisidén är enkel: för en punkt (x, y) i planet är avståndet till z -axeln $r^2 = x^2 + y^2$, dvs. summan av de vinkelräta avstånden till x - och y -axlarna i kvadrat. Integrerar man bidragen över skivan så summeras integralerna direkt.

Skivans tröghetsmoment med avseende på z -axeln

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (6.4)$$

Tröghetsmomentet med avseende på x - respektive y -axlarna :

$$I_{xx} = \int y^2 dm \quad (6.5)$$

$$I_{yy} = \int x^2 dm \quad (6.6)$$

Från ekvationerna (6.4)-(6.6) inses att

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (6.7)$$

gäller för en tunn skiva som saknar utsträckning i z -led.

skapas

☰ M 6.2 – halvskiva >

9. Sammanfattning och metodik

🔗 Hur man tar fram tröghetsmomentet i ett problem

1. **Identifiera axeln.** Vilken är rotationsaxeln? Är den fix, går genom cm, eller momentancentrum?
2. **Identifiera kroppen.** Är den homogen? Sammansatt av enkla delar? Har den ett hål?
3. **Slå upp eller härled.** Sök i Fysika eller Adams, eller använd $I = \int r^2 dm$ direkt om kroppen är enkel.
4. **Använd Steiners sats** för att flytta axeln om det behövs.
5. **Använd vinkelaxelsatsen** om kroppen är plan och axeln är vinkelrät mot planet.
6. **Summera över delar** för sammansatta kroppar (eller subtrahera, för hål).

Storhet	Translation	Rotation kring fix axel
Tröghet	m (massa)	I (tröghetsmoment)
"Hastighet"	v	ω
"Acceleration"	a	α
"Kraftmotsvarighet"	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\tau = I\alpha$
Rörelseenergi	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Rörelsemängd	$p = mv$	$L = I\omega$

⚠️ Vanliga fallgropar

- **Glömt parallellaxelsatsen** när axeln ligger en bit från cm.
- **Använt fel r :** r är *vinkelräta* avståndet till rotationsaxeln, inte radievektorns längd.
- **Antagit konstant densitet** utan motivering – kontrollera om kroppen är homogen innan ρ bryts ut.
- **Adderat tröghetsmoment kring olika axlar.** Additivitet kräver *samma* axel.

Tillämpningar – utförda exempel

☰ [Exempel A – trissa, två lastfall](#) >

☰ [Exempel B – jojo \(tenta 190320\)](#) >

☰ [Exempel C – halvklot kring fix diameteraxel \(M 7.3 i kompendiet \)](#) >

Läsning

- [9.4 Energy in Rotational Motion](#)
- [9.5 Parallel-Axis Theorem](#)
- [9.6 Moment-of-Inertia Calculations](#)
- [M 6.1 Tröghetsradie](#)
- [M 6.2 Sammansatta kroppar](#)
- [M 6.3 Tunna skivor](#)
- [Fysika: Tf-tabellen för standardkroppar](#)

Se även

- [Rotationsmekanik](#)
- [Momentekvationen](#)
- [Rörelsemängdsmoment](#)
- [Allmän rörelse](#)
- [Momentancentrum](#)
- [Masscentrum](#)

Resurser

- [Khan Academy: Moment of inertia](#) — bygger upp I via samma summa över bitar.
- [Wikipedia: List of moments of inertia](#) — referenstabell när Fysika inte räcker till.

- [MIT OCW 8.01: Lecture 21](#) — Walter Lewin gör en klassisk demonstration av Exempel-A-typ.
-