

Partiella derivator

Jun 23, 2026, 10 min read

#matematik

#analys

#flervariabelanalys

#partiell-derivata

Kapitel: 13.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Funktioner av flera variabler, Gränsvärden och kontinuitet

1. Partiell derivata

En partiell **derivata** beskriver hur snabbt en funktion av flera variabler förändras när **en variabel i taget** varieras, medan de övriga hålls konstanta.

1.1 Definition

För en funktion $f(x, y)$ definieras de partiella derivatorna i punkten (x_0, y_0) som:

$$f_1(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_2(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

1.2 Alternativ beteckning

Om $z = f(x, y)$ skrivs de partiella derivatorna ofta som:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y)$$

Symbolen ∂ (rund d) används för att skilja partiell derivering från vanlig derivering.

1.3 Beräkningsregel

 **Kom ihåg – hur man räknar**

- f_x : derivera m.a.p. x , behandla y **som en konstant** (frys den).
- f_y : derivera m.a.p. y , behandla x **som en konstant** (frys den).

Det är exakt envariabelderivering – fast med de övriga variablerna “frysta”.

☰ Exempel a) Polynom | >

☰ Exempel b) Kvotregeln | >

☰ Exempel c) Derivering och insättning >

2. Tangentvektorer

I en punkt (a, b) på ytan $z = f(x, y)$ kan man bilda två tangentvektorer – en längs x -riktningen och en längs y -riktningen.

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix}, \quad \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix}$$

- \vec{T}_1 är tangent till kurvan som uppstår när $y = b$ hålls fast och x varierar.
- \vec{T}_2 är tangent till kurvan som uppstår när $x = a$ hålls fast och y varierar.

Dessa två vektorer spänner upp tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$.

3. Normalvektor

Normalvektorn till ytan i punkten $(a, b, f(a, b))$ fås via **kryssprodukten** av tangentvektorerna:

$$\vec{n} = \vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(a, b) \\ -f_2(a, b) \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Normalvektor till en nivåyta

För en yta definierad implicit som $g(x, y, z) = C$ ges normalvektorn av **gradienten**:

$$\vec{n} = \nabla g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}$$

4. Tangentplan

4.1 Tangentplanets ekvation

Tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av:

$$z - f(a, b) = f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

Ekvationen följer direkt av att planet ska innehålla punkten $(a, b, f(a, b))$ och ha normalvektorn $\vec{n} = [-f_1(a, b), -f_2(a, b), 1]^\top$.

☰ [Exempel – Tangentplan till en paraboloid](#) >

Läsning

- [13.3 Partial Derivatives](#)

Se även

- [Funktioner av flera variabler](#)
 - [Gränsvärden och kontinuitet](#)
 - [Nivåkurvor och ytor](#)
 - [Gradient och riktningsderivata](#)
-

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Partial derivatives, visually](#) — geometrisk tolkning av partiella derivator
- [Khan Academy: Partial derivatives](#) — introduktion med exempel

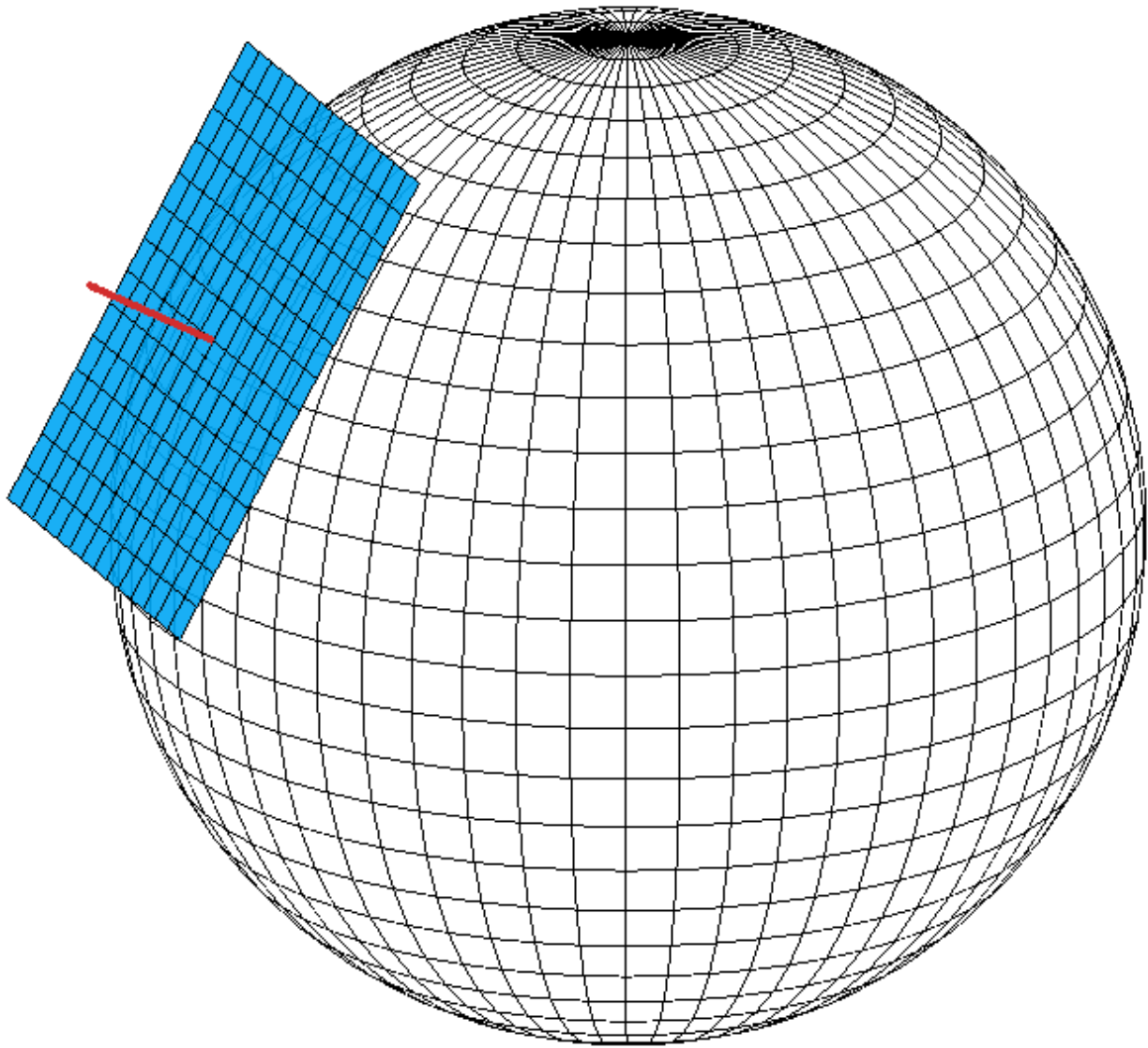
Interaktiva verktyg

- [GeoGebra: Tangent Plane](#) — visualisera tangentplan i 3D
- [Wolfram Alpha](#) — beräkna partiella derivator med `partial derivative of f(x,y) with respect to x`

Wikipedia

- [Partial derivative](#)
 - [Tangent plane](#)
 - [Normal vector](#)
-

Illustrationer



Tangentplan till en sfär

Räkner regler

Kapitel: 13.3–13.5 · Kurs: M0068M Förkunskaper: Partiella derivator, Kedjeregeln

1. Grundläggande regler

 Principen: en variabel i taget

Alla vanliga derivationsregler från envariabelanalys gäller för partiella derivator – man deriverar med avseende på **en variabel** och behandlar alla **övriga variabler som konstanter**.

1.1 Linjäritet

Om f och g är deriverbara och α, β är konstanter:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\alpha f + \beta g] = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial x}$$

1.2 Konstant faktor

$$\frac{\partial}{\partial x}[c \cdot f(x, y)] = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

🔗 **Obs – y är en konstant!**

När du deriverar m.a.p. x är y konstant. Det innebär att t.ex. y^3 , e^y och $\sin(y)$ alla är konstanta faktorer och deriveras som noll om de saknar x .

2. Produktregeln

Sats

Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är partiellt deriverbara gäller:

$$\frac{\partial}{\partial x}[u \cdot v] = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

och analogt för derivering m.a.p. y .

Schema – kom ihåg

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exakt samma form som i envariabelanalys – håll bara koll på vilken variabel du deriverar m.a.p.

☰ [Exempel a\) Enkel produkt >](#)

☰ [Exempel b\) Produkt av funktioner i båda variablerna >](#)

☰ [Exempel c\) Tre faktorer >](#)

3. Kvotregeln

Sats

Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är partiellt deriverbara och $v \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot v - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

Minnesbild

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

🔄 Alternativ – skriv om som produkt

Ofta enklare att skriva $\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ och använda produktregeln tillsammans med kedjeregeln: $\frac{\partial}{\partial x} [u \cdot v^{-1}] = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v^{-1} + u \cdot (-1)v^{-2} \frac{\partial v}{\partial x}$

☰ [Exempel a\) Grundfall >](#)

☰ Exempel b) Blandad kvot >

4. Kedjeregeln – snabbreferens

 Fullständig genomgång

Se [Kedjeregeln](#) för detaljer, variabelträd och variabelbyten.

Fall 1 – ett oberoende variabel

$$z = f(x, y), x = x(t), y = y(t):$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Fall 2 – två oberoende variabler

$$z = f(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t):$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Kedjeregeln för sammansatt funktion

Om $h(x, y) = f(g(x, y))$ – alltså f av en skalär:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

☰ Exempel – kedjeregeln på skalär funktion >

5. Implicit derivering

Om $F(x, y, z) = 0$ definierar z implicit som funktion av x och y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Förutsättning

Formeln kräver att $F_z \neq 0$ i punkten. Om $F_z = 0$ kan man inte lösa ut z lokalt.

 [Exempel – implicit derivering](#) >

6. Snabbtabell – räkneregler

Regel	Formel
Summa	$\partial_x(f + g) = f_x + g_x$
Konstant	$\partial_x(c) = 0$
Konstant faktor	$\partial_x(cf) = cf_x$
Produkt	$\partial_x(fg) = f_xg + fg_x$
Kvot	$\partial_x(f/g) = (f_xg - fg_x)/g^2$
Kedja (skalär)	$\partial_x f(g) = f'(g) g_x$
Kedja (vektor)	$\partial_t f(x(t), y(t)) = f_x \dot{x} + f_y \dot{y}$
Implicit	$\partial_x z = -F_x/F_z$
Potens	$\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$

7. Tips och vanliga misstag

🔗 Tips 1 – se alltid vilken variabel du deriverar m.a.p.

Skriv ut $\frac{\partial}{\partial x}$ eller $\frac{\partial}{\partial y}$ tydligt i varje steg. Det är lätt att missa att byta derivatavariabel mitt i en beräkning.

🔗 Tips 2 – faktorisera gärna ut konstanter

Om $f(x, y) = e^y \cdot g(x)$, så är $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cdot g'(x)$ direkt – ingen produktregel behövs.

🔗 Tips 3 – skriv om kvoten som produkt vid komplexa uttryck

$\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ och tillämpa produktregel + kedjeregel. Minskar risken för teckenmissar.

🔗 Tips 4 – kontrollera med mixed partials

För tillräckligt snälla funktioner gäller **Clairauts sats**: $f_{xy} = f_{yx}$. Stämmer inte det, har du räknat fel.

⚠️ Vanligt misstag 1 – glömmer kedjeregeln

$\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = \cos(xy)$ är **fel**.

Korrekt: $\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = y \cos(xy)$ – inre derivatan y måste multipliceras in.

⚠️ Vanligt misstag 2 – deriverar y m.a.p. x

$\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 3y^2$ är **fel** (y är konstant!).

Korrekt: $\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 0$.

⚠ Vanligt misstag 3 – blandar d och ∂

Använd ∂ för partiella derivator (flera variabler) och d för vanliga derivator (en variabel eller total derivata). Fel symbol signalerar fel tänk.

☰ [Träningsuppgift – identifiera räkneregler](#) >

Se även

- [Partiella derivator](#)
- [Kedjeregeln](#)
- [Högre ordningens derivator](#)
- [Gradient och riktningsderivata](#)

Resurser

Videor

- [Khan Academy: Partial derivative rules](#) [☞] – regler och exempel
- [Professor Leonard: Partial Derivatives](#) [☞] – produkt- och kvotregel i flervariabelfall
- [3Blue1Brown: Implicit differentiation](#) [☞] – intuition för implicit derivering

Interaktiva verktyg

- [Wolfram Alpha](#) [☞] – `partial derivative of f(x,y) with respect to x` för symbolisk beräkning
- [Desmos 3D](#) [☞] – visualisera funktioner och deras derivator

Wikipedia

- [Partial derivative — Wikipedia](#)
- [Product rule — Wikipedia](#)
- [Implicit function theorem — Wikipedia](#)

Fördjupning

- Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*, avsnitt 13.3–13.5

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-03-25, M0068M

2026-03-25 – Föreläsning 3 (Partiella derivator, tangentplan)

Definition

$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Alternativ beteckning om $z = f(x, y)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y)$

Beräkningsexempel

a) $f(x, y) = x^2 + 5x^3y^2$: $f_1 = 2x + 15x^2y^2$, $f_2 = 10x^3y$

b) $z = \frac{x}{x^2 + e^{xy}}$: $f_1 = \frac{-x^2 + e^{xy} - xy e^{xy}}{(x^2 + e^{xy})^2}$, $f_2 = -\frac{x^2 e^{xy}}{(x^2 + e^{xy})^2}$

c) $z = e^{2x} \cos(xy)$: derivering och insättning $(x, y) = (1, 0)$: $f_1(1, 0) = 2e^2$, $f_2(1, 0) = 0$

Tangentvektorer och tangentplan

Tangentvektorer i (a, b) : $\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix}$, $\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix}$

$$\text{Normalvektor: } \vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} -f_1(a, b) \\ -f_2(a, b) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tangentplanets ekvation: $z - f(a, b) = f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$

Exempel: $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, tangentplan i $(1, 2)$:

- Punkt: $(1, 2, 6)$; $f_1(1, 2) = 4$; $f_2(1, 2) = 4$
 - Tangentplan: $z - 6 = 4(x - 1) + 4(y - 2)$
-