Polära koordinater

Jun 23, 2026, 15 min read

#matematik #fysik #mekanik #kinematik #koordinater

> **Kurser:** F0004T, F0006T, M0066M **Förkunskaper:** Vektorer och rörelse, Cirkelrörelse

---

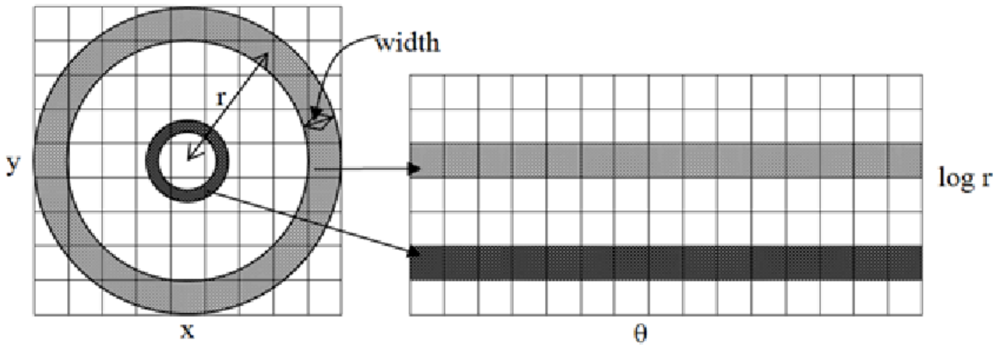
1. Position i polära koordinater

Det polära koordinatsystemet beskriver en punkt i planet med två tal: avståndet $r \geq 0$ till origo och vinkeln θ från positiva x-axeln, mätt moturs.

$$\boxed{x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta}$$

Omvänt får vi tillbaka de kartesiska koordinaterna ur

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ (rätt kvadrant!)}.$$



> **Grundtanken**
>
> Polära koordinater är *det naturliga språket* för rörelse som har en föredragen punkt — origo. Allt som handlar om avstånd till en punkt eller vridning kring en punkt blir mycket enklare än med kartesiska (x, y).

⚠ **Singulariteten i origo**

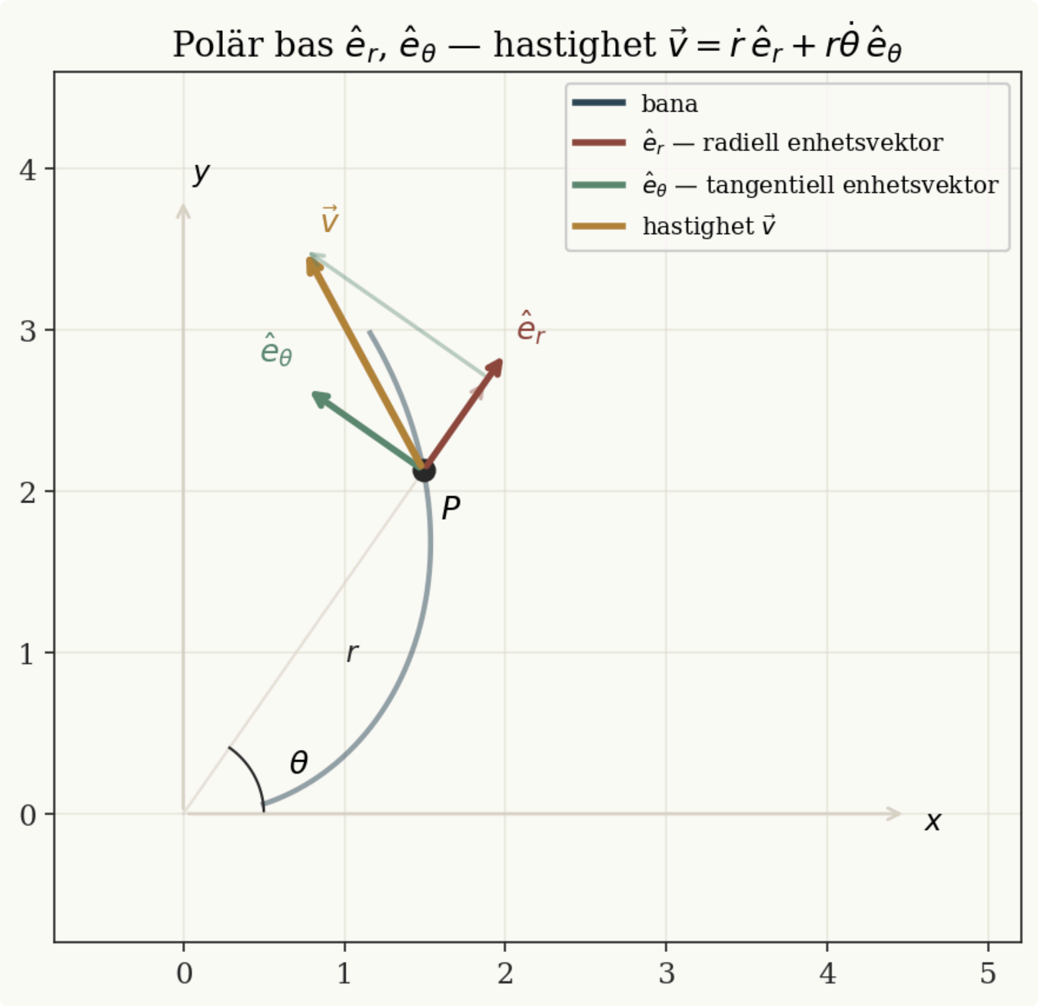
I origo är vinkeln θ obestämd: alla värden $\theta \in [0, 2\pi)$ ger samma punkt. För kartläggningar mellan polärt och kartesiskt brukar man tillåta detta som en mängd med area noll — utanför origo är bytet bijektivt.

---

2. Den rörliga basen $\hat{r}, \hat{\theta}$

Varje punkt (r, θ) i planet har sin egen lokala bas: en enhetsvektor $\hat{r}$ som pekar *radiellt utåt* från origo, och en enhetsvektor $\hat{\theta}$ som pekar *transversellt* (90° moturs från $\hat{r}$).

$$\boxed{\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)}$$



Den polära basen är *rörlig*

Till skillnad från kartesiska $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ — som pekar likadant överallt — ändras $\hat{r}$ och $\hat{\theta}$ från punkt till punkt. Det är just denna rörlighet som ger upphov till de "extra" termerna i hastighet och acceleration nedan.

Basen är fortfarande ortonormerad i varje punkt: $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ och $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$.

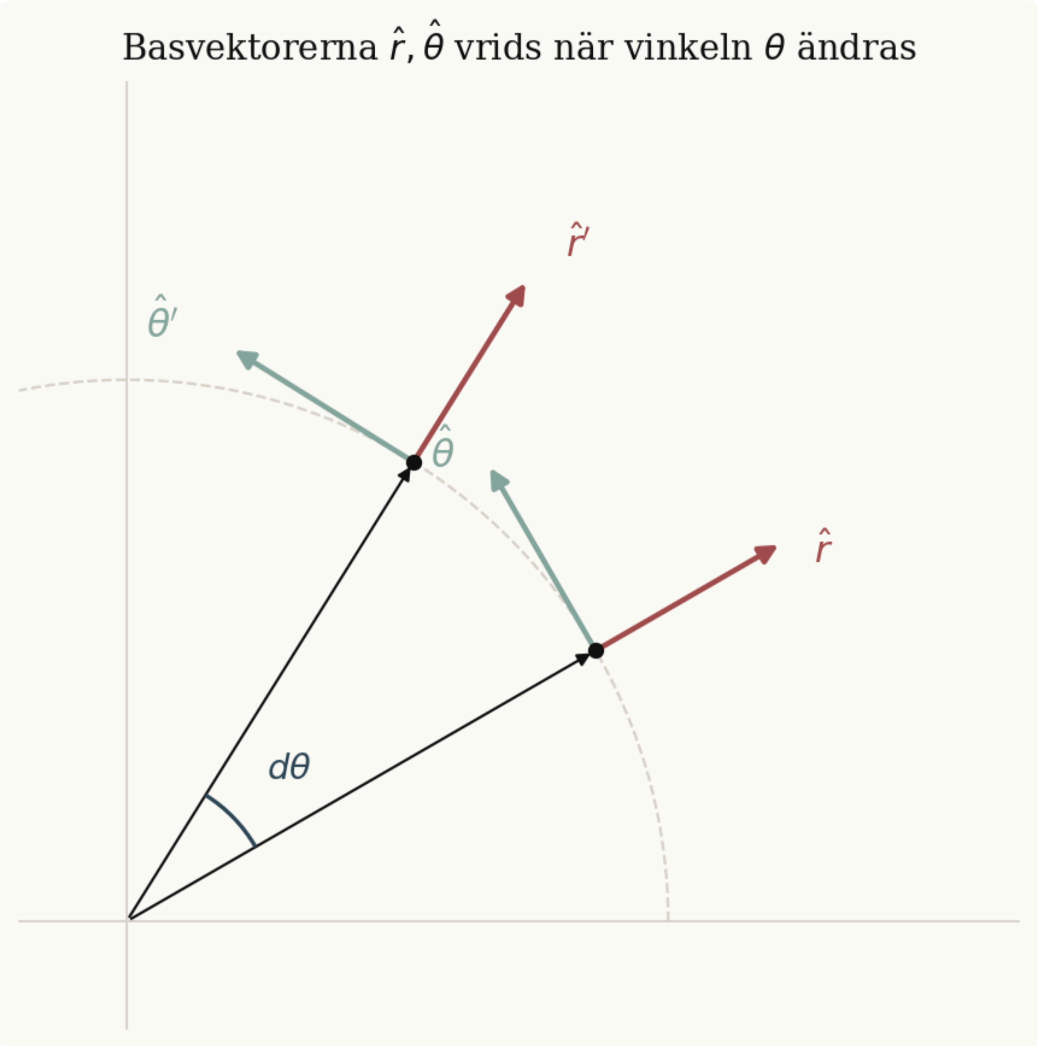
---

3. Hur basen ändras i tiden

Eftersom $\hat{r}$ och $\hat{\theta}$ beror på θ, och θ kan bero på tiden, så ändras basvektorerna när partikeln rör sig. Deriverar man uttrycken i §2 med kedjeregeln får man

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}, \qquad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{r}.$$

Bilden nedan visar tanken: när partikeln rör sig från en punkt med vinkel θ till en med vinkel $\theta + d\theta$, vrids hela basen med vinkeln $d\theta$. Ändringen $d\hat{r}$ är en vektor *vinkelrät* mot $\hat{r}$ — alltså längs $\hat{\theta}$.



Snabb minnesregel

Bägge derivator är “rotation med vinkelhastighet $\dot{\theta}$ i moturs riktning”:

- $\hat{r}$ vrids åt $+\hat{\theta}$-hållet $\Rightarrow$ $d\hat{r}/dt = +\dot{\theta}\hat{\theta}$.
- $\hat{\theta}$ vrids åt $-\hat{r}$-hållet $\Rightarrow$ $d\hat{\theta}/dt = -\dot{\theta}\hat{r}$.

4. Hastighet

Positionsvektorn till en partikel kan skrivas $\vec{r} = r\,\hat{r}$. Tidsderivering med produktregeln, plus $d\hat{r}/dt = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$, ger

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}}$$

Term	Namn	Tolkning
$\dot{r}$	radiell hastighet	hur snabbt avståndet till origo ändras
$r\dot{\theta}$	transversell hastighet	hur snabbt partikeln “svänger runt” origo

Båglängdsperspektivet

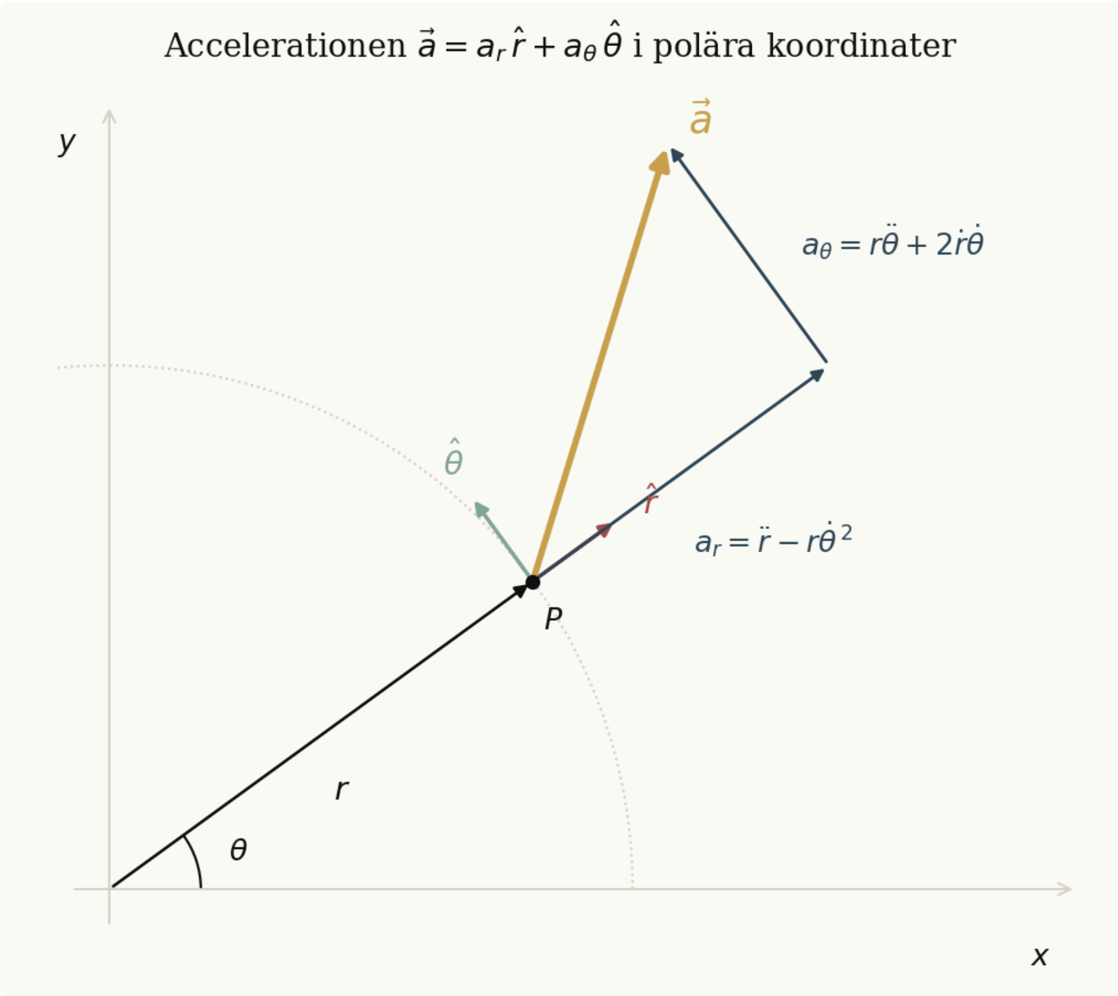
Faktorn r i $r\dot{\theta}$ kommer av att en liten vinkeländring $d\theta$ vid avstånd r svarar mot båglängden $r\,d\theta$. Vid större r ger samma vinkelhastighet en större tangentiell fart — precis som ett barn längst ut på en karusell rör sig fortare än ett som sitter nära mitten.

---

5. Acceleration

Deriverar man $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ en gång till — och håller koll på att även $\hat{r}$ och $\hat{\theta}$ deriveras — får man

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}}$$



Komponentvis:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

De fyra termerna och vad de betyder

Term	Namn	Vad den fångar
$\ddot{r}$	ren radiell acceleration	partikelns avstånd till origo accelererar
$-r\dot{\theta}^2$	**centripetalterm**	krökning av banan; pekar *inåt* (negativt $\hat{r}$)
$r\ddot{\theta}$	tangentiell vinkelacceleration	rotationen kring origo snabbas på/bromsas

Term	Namn	Vad den fångar
$2\dot{r}\dot{\theta}$	**Coriolisterm**	uppstår när både r och θ ändras samtidigt

Specialfall: likformig cirkelrörelse

Sätt $r = R$ (konstant), så $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, och $\dot{\theta} = \omega$ (konstant), så $\ddot{\theta} = 0$. Då blir

$$\vec{a} = -R\omega^2\,\hat{r} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}| = \frac{v^2}{R},$$

där vi använt $v = R\omega$. Detta är precis centripetalaccelerationen — minustecknet säger att den pekar *in mot* origo. Bra sanity-check: kinematiken i polära koordinater måste ge samma svar som specialfallet.

---

6. Räkneexempel: bilen på en rak väg

Det enda stället polära koordinater dyker upp i F0006T-proven är **polisradar-problemet**. Det finns i två sifferversioner men löses *exakt* likadant, och hela lösningen vilar på en enda mening i uppgiften: bilen kör på en **rak väg**. Utan den meningen är problemet olösbart; med den blir det rättframt. Läs därför hela det här avsnittet som en enda lång motivering av *varför* man får göra det man gör — räkningen i exemplen är sedan bara att fylla i siffror.

Mätvärdena räcker inte i sig — det är därför vägen måste vara rak

Radarn rapporterar bara **fyra** kinematiska tal: $r,\ \theta,\ \dot{\theta}$ och $\ddot{r}$ (plus massan m). Men accelerationsformeln

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

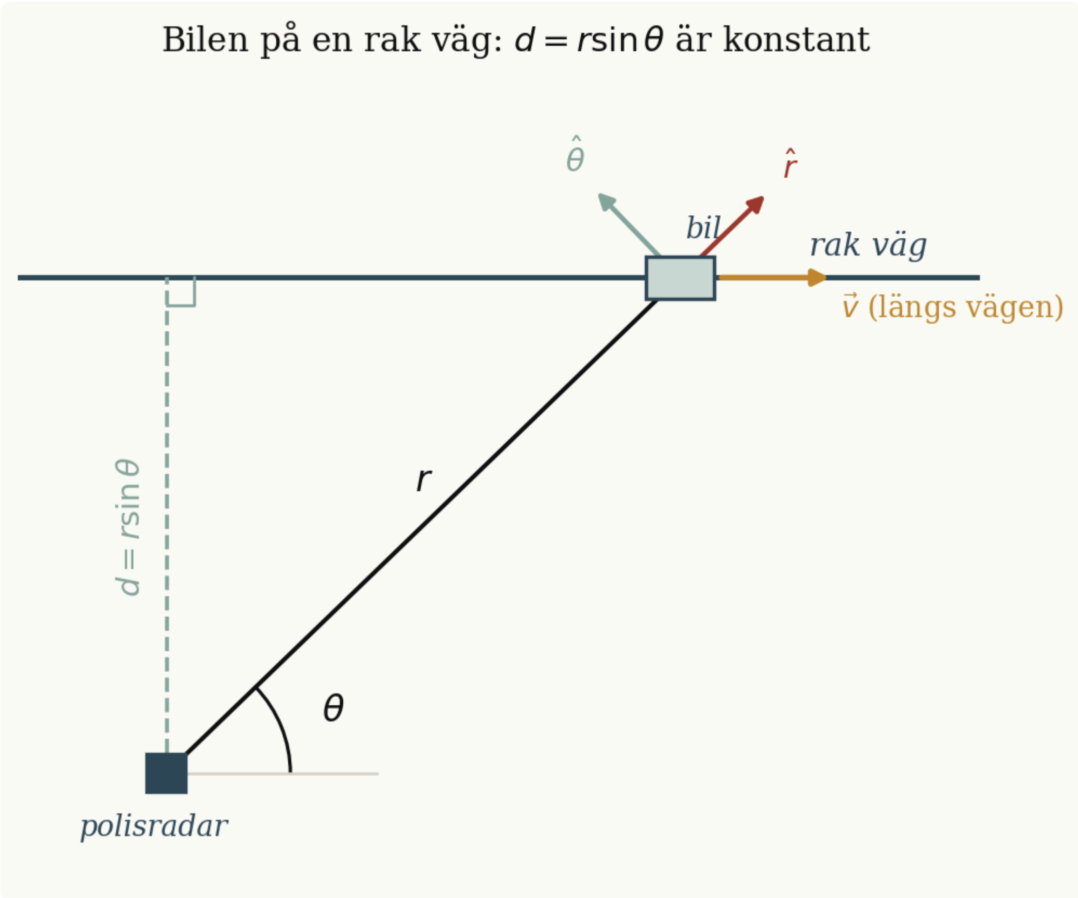
innehåller *även* $\dot{r}$ och $\ddot{\theta}$ — två storheter vi inte fått. Att bara sätta dem till noll vore att hitta på fysik och ger fel svar. Det som räddar oss är att **banan är känd**: en rak linje. En känd bana binder ihop r och θ, och därmed också alla deras derivator. Det är den bindningen som levererar de två saknade talen.

Den bärande idén: en känd bana är ett *tvång*, och ett tvång får deriveras

Jämför en fri partikel med en pärla trädd på en ståltråd. Den fria partikeln kan ha vilken kombination som helst av de sex talen $r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ — de är oberoende. Pärlan på tråden är låst: så fort vi vet *var* på tråden den är (säg vinkeln θ) är r bestämt; då är $\dot{r}$ låst till $\dot{\theta}$, och $\ddot{r}$ låst till $\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$. Bilen på den raka vägen *är* pärlan, och vägen är tråden. Vi skriver tråden som en ekvation som gäller **vid varje ögonblick bilen rullar** — och just därför får vi derivera den i tiden: en likhet som alltid är sann har en tidsderivata som också alltid är sann. Varje derivering knyter ihop en ny derivata, och så fyller vi luckorna $\dot{r}$ och $\ddot{\theta}$.

6.1 Trådens ekvation: $r\sin\theta = d$

Polisradarn står inte *på* vägen utan vid sidan av den, på det vinkelräta avståndet d till vägbanan. Det avståndet ändras aldrig — radarn flyttar sig inte och vägen är rak. Det är hela tvånget, och vi läser av det direkt ur figuren.



Titta på den rätvinkliga triangeln: radarn i ett hörn, bilen i ett annat, och fotpunkten (där det vinkelräta avståndet möter vägen) i det tredje. Hypotenusan är synlinjen r, och θ är vinkeln mellan synlinjen och själva vägen. Kateten som står vinkelrät mot vägen är då $r\sin\theta$ — men den kateten *är* per definition det vinkelräta avståndet till vägen. Alltså:

$$\boxed{d = r\sin\theta = \text{konstant}}$$

Lägg märke till vad θ betyder här: vinkeln mäts **från vägens riktning**. När bilen är långt borta löper synlinjen nästan parallellt med vägen och θ är litet; när bilen är rakt för om radarn (närmaste punkten) är synlinjen vinkelrät mot vägen och $\theta = 90^\circ$; när bilen sedan avlägsnar sig minskar θ igen.

Allt som följer ärver antagandet "rak väg"

Det är *enbart* för att vägen är rak som $r\sin\theta$ är **samma tal** vid alla tidpunkter. Vore vägen krökt skulle det vinkelräta avståndet till radarn variera, högerledet vore inte längre en konstant, och derivatorna nedan skulle få extra okända termer — då går problemet inte att lösa med enbart radarns fyra tal. Varje steg i §6.1 och i båda exemplen lutar sig mot denna enda förutsättning. Stryk “rak väg” och hela metoden faller.

Steg 1 — derivera tråden en gång; det ger $\dot{r}$. En storhet som är konstant i tiden har tidsderivatan noll. Derivera vänsterledet $r \sin\theta$ med produktregeln (både r och θ beror på tiden):

$$\frac{d}{dt}\big(r\sin\theta\big) = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} = 0.$$

Detta är inte en formel att memorera utan ett *villkor* med en fin tolkning: de två sätten avståndet till vägen kan ändras på — genom att r växer (ger $\dot{r}\sin\theta$) eller genom att vinkeln vrids (ger $r\cos\theta\,\dot{\theta}$) — tar alltid ut varandra exakt, så att summan blir noll och bilen aldrig lämnar vägen. Löser vi ut den radiella farten:

$$\boxed{\dot{r} = -r\dot{\theta}\cot\theta}$$

Den okända $\dot{r}$ är nu *uttryckt i* de mätta talen $r, \theta, \dot{\theta}$. Det är rak-väg-antagandets första utdelning: en av luckorna är fylld utan att vi behövt mer mätdata.

Steg 2 — derivera tråden en gång till; det ger $\ddot{\theta}$. Villkoret $\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} = 0$ är också sant vid varje tidpunkt, så även *det* får deriveras i tiden. Produktregeln på var och en av de två termerna:

$$\underbrace{\ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}(\dot{r}\sin\theta)} \;+\; \underbrace{\dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta} - r\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + r\cos\theta\,\ddot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(r\cos\theta\,\dot{\theta}\right)} = 0.$$

De två likadana $\dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}$-termerna slås ihop till en faktor 2 (samma struktur som Coriolistermen längre upp — det är ingen slump, det är produktregeln på ett blandat $r\theta$ -uttryck):

$$\ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta = 0.$$

Nu är $\ddot{\theta}$ den **enda** obekanta kvar: $r, \theta, \dot{\theta}, \ddot{r}$ är mätta och $\dot{r}$ kom från steg 1. Lös ut den:

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{r\dot{\theta}^2\sin\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - \ddot{r}\sin\theta}{r\cos\theta}}$$

Därmed har vi *alla sex* polära storheter. Notera särskilt att $\ddot{\theta}$ i allmänhet **inte** är noll — den raka vägen tvingar fram en bestämd vridningsacceleration kring radarn, och just därför är det ett fel att slentrianmässigt anta $\ddot{\theta} = 0$.

Steg 3 — nu, och först nu, accelerationsformeln. Poängen med steg 1–2 var att fylla luckorna $\dot{r}$ och $\ddot{\theta}$. Med dem på plats är resten ren insättning i den vanliga polära kinematiken, följt av Newtons andra lag:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}, \qquad |\vec{F}| = m|\vec{a}|.$$

En oberoende sluttest: accelerationen ligger längs vägen

Eftersom en rak väg har krökning noll får varken hastigheten eller accelerationen någon komponent *vinkelrät* mot vägen — båda vektorerna pekar längs vägbanan. Det ger en gratis kontroll: räknar man om $\vec{v}$ och $\vec{a}$ till xy-komponenter ska de bli parallella. Är de det vet man att steg 1–2 är rätt; är de det inte har tvånget hanterats fel. Detta är samma fysik som $r\sin\theta = \text{konstant}$, sedd från andra hållet.

Exempel 1 — Polisradar (F0006T, tenta 2022-03-27 / 2025-06-04)

Exempel 2 — Polisradar med andra siffror (F0006T 2024-08-27 / 2025-08-26)

Sammanfattning: vad antagandet "rak väg" gör för oss

Båda tentauppgifterna ser ut som rena insättningsproblem, men radarn ger bara fyra kinematiska tal medan accelerationen behöver sex. Det är den raka vägen — och *bara* den — som fyller gapet:

1. Rak väg $\Rightarrow$ det vinkelräta avståndet $r\sin\theta = d$ är konstant i tiden.
2. Derivera en gång $\Rightarrow \dot{r}$ (annars okänd).
3. Derivera två gånger $\Rightarrow \ddot{\theta}$ (annars okänd; i synnerhet *inte* noll).
4. Först därefter $\vec{a}$ i polära koordinater, sedan $\vec{F} = m\vec{a}$.

Det vanliga, naiva felet är att hoppa direkt till steg 4 och gissa $\dot{r}$ och $\ddot{\theta}$. Då försvinner hela fysiken i problemet, och svaret blir bara rätt av en slump om gissningen råkar matcha tvånget. Lär dig kedjan “rak väg $\to$ derivera tvånget $\to$ accelerationsformeln”, inte siffrorna.

⚠ **Vanliga fallgropar**

- **Hittat på $\dot{r}$ eller satt $\ddot{\theta} = 0$.** Mätvärdena innehåller inte $\dot{r}$ och $\ddot{\theta}$ — de *måste* räknas fram ur rak-väg-villkoret. Att gissa $\ddot{\theta} = 0$ är fysikaliskt fel: en rak väg tvingar fram en bestämd $\ddot{\theta} \neq 0$.
- **Glömt centripetaltermen $-r\dot{\theta}^2$.** Att skriva $a_r = \ddot{r}$ stämmer bara om bilen inte vrider sig kring radarn.
- **Glömt Coriolistermen $2\dot{r}\dot{\theta}$.** Faktorn 2 kommer från produktregeln i derivationen.
- **Räknat $|\vec{a}| = |a_r| + |a_\theta|$.** Komponenterna är ortogonala — det är *Pythagoras* som gäller: $|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$.

---

7. Sammanfattning

Storhet	Uttryck i polära koordinater
Position $\vec{r}$	$r\,\hat{r}$
Hastighet $\vec{v}$	$\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$
Acceleration $\vec{a}$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$
Basvektorernas tidsderivator	$\dfrac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}, \quad \dfrac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{r}$

Metodikchecklista

När en uppgift ger mätvärden i polära koordinater:

1. **Räkna mätvärdena.** Får du alla sex storheter $(r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$? Om någon saknas finns ett **tvångsvillkor** (t.ex. rak väg, $r\sin\theta = \text{konst}$) som ska deriveras för att få de saknade derivatorna — gissa aldrig.

2. **Sätt upp formeln** för $\vec{v}$ eller $\vec{a}$ symboliskt först — så ser man vilka mätvärden som behövs.
3. **Beräkna a_r och a_θ** komponentvis. Var noga med teckenkonventioner: $\dot{r} < 0$ betyder att partikeln närmar sig origo, $\dot{\theta} < 0$ betyder vridning medurs.
4. **Ortogonalt belopp:** $|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$.
5. **Newton avslutar:** $|\vec{F}| = m|\vec{a}|$.
6. **Sanity-check** mot specialfall (cirkelrörelse, ren radiell rörelse) eller via farten $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$.

Läsning

- M2 Polära koordinater — F0006T:s primära kursunderlag (Lehto)
- 8.5 Polar Coordinates and Polar Curves — grundläggande geometrisk introduktion (Adams)
- 12.6 Polar Components of Velocity and Acceleration — härledning av samma formler i kalkylböckernas språk
- 3 Motion in Two or Three Dimensions — Young & Freedman om allmän 2D-kinematik

Se även

- Cirkelrörelse — specialfall där r är konstant
- Vektorer och rörelse — kartesiska motsvarigheter till samma kinematik
- Variabelbyte i dubbelintegraler — polära koordinater som integrationsverktyg ($dA = r\,dr\,d\theta$)
- Polär form för komplexa tal — samma koordinater, andra tillämpning

Resurser

- Khan Academy: Polar coordinates — kort introduktion
- Wikipedia: Polar coordinate system
- MIT OCW 8.01 — Lecture on motion in 2D — kompletterande genomgång av vektorkinematik

---