Skalärproduktsrum

Jun 23, 2026, 27 min read

#linjär-algebra #inreprodukt #vektorrum

---

1. Repetition: skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$

I $\mathbb{R}^n$ har vi redan den bekanta **punktprodukten** (dot product):

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$

där $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ och $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Denna produkt ger oss verktyg som **vinkel**, **längd** och **avstånd** — begrepp som är centrala i geometri och optimering. Frågan som denna föreläsning besvarar är: **kan vi definiera liknande begrepp på andra** vektorrum, som polynomrum eller funktionsrum?

---

2. Allmän skalärprodukt — definition

Definition: Skalärprodukt (inre produkt)

Låt V vara ett reellt vektorrum. En **skalärprodukt** (inner product) på V är en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ som uppfyller följande fyra axiom för alla $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ och alla skalärer $c \in \mathbb{R}$:

Nr	Axiom	Namn
1	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$	Symmetri
2	$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$	Additivitet
3	$\langle c\vec{u}, \vec{v} \rangle = c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	Homogenitet

Nr	Axiom	Namn
4	$\langle\vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0$, med likhet om och bara om $\vec{u}=\vec{0}$	Positivdefinithet

Ett vektorrum utrustat med en skalärprodukt kallas ett **inre produktrum**.

Axiom 2 + 3 tillsammans kallas linjäritet i första argumentet

Tack vare symmetrin (axiom 1) är skalärprodukten även linjär i det andra argumentet. Man säger att den är **bilinjär**.

3. Norm och avstånd

Från en skalärprodukt kan vi definiera längd och avstånd:

Definition: Norm och avstånd

Låt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vara en skalärprodukt på V.

Normen (längden) av $\vec{u}$:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$$

Avståndet mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$:

$$d(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}-\vec{v}||$$

Koppling till geometri: Vinkelräthet (ortogonalitet) och kortaste avstånd definieras med hjälp av normen. Begreppet "vinkelrät" i ett allmänt inre produktrum betyder att $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$.

4. Grundläggande räkneregler

Exempel 1: Skalärprodukten av nollvektorn med valfri vektor

Exempel 2: Avståndet är symmetriskt

Exempel 3: Utveckla $\langle 2\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle$

---

5. Skalärprodukter på $\mathbb{R}^n$

5.1 Standardskalärprodukten

Exempel 4: Standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^n$

5.2 Viktade skalärprodukter

Exempel 5: Viktad skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$

Generell viktad skalärprodukt

På $\mathbb{R}^n$ med vikter $w_1, w_2, \ldots, w_n > 0$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

Kravet är att alla vikter är strikt positiva $(w_i > 0)$. Om någon vikt vore 0 eller negativ bryts axiom 4 (positivdefinithet).

5.3 Icke-exempel: när villkoren inte uppfylls

Exempel 6: En funktion som *inte* är en skalärprodukt — nollvikt

Exempel 7: En funktion som *inte* är en skalärprodukt — saknar symmetri

5.4 Matrisbaserad skalärprodukt

Exempel 8: Skalärprodukt via en inverterbar matris

---

6. Skalärprodukter på polynomrum

6.1 Evalueringsskalärprodukt

Den viktigaste typen av skalärprodukt på polynomrum bygger på att **evaluera polynomen i fasta punkter** och bilda en viktad summa.

Evalueringsskalärprodukt på $\mathbb{P}_n$

Välj $n + 1$ **distinkta** punkter $x_0, x_1, \ldots, x_n$ och positiva vikter $w_0, w_1, \ldots, w_n > 0$. Definiera:

$$\langle p, q \rangle = w_0\, p(x_0)\, q(x_0) + w_1\, p(x_1)\, q(x_1) + \cdots + w_n\, p(x_n)\, q(x_n)$$

Krav: Man behöver minst $n + 1$ distinkta punkter för $\mathbb{P}_n$. I $\mathbb{P}_2$ behövs alltså minst 3 punkter; i $\mathbb{P}_7$ behövs minst 8.

Varför just $n + 1$ punkter? Ett polynom av grad $\leq n$ som är noll i $n + 1$ punkter måste vara nollpolynomet (det har fler nollställen än grad). Detta säkerställer axiom 4: om $p \neq 0$ måste $p(x_i) \neq 0$ för minst ett i, och med positiva vikter ger detta $\langle p, p \rangle > 0$.

Exempel 9: Evalueringsskalärprodukt på $\mathbb{P}_2$ (tre punkter)

6.2 Icke-exempel: för få punkter

Exempel 10: Bara två punkter i $\mathbb{P}_2$ — inte en skalärprodukt

6.3 Fler exempel på $\mathbb{P}_2$

Exempel 11: Två evalueringspunkter i $\mathbb{P}_2$ — giltigt eller ej?

Exempel 12: Icke-symmetrisk evalueringsprodukt

Exempel 13: Tre punkter med positiva vikter — giltig skalärprodukt

---

7. Skalärprodukter via integration

Integration ger en naturlig skalärprodukt på funktionsrum. Till skillnad från evalueringsskalärprodukter (som samplar i ändligt många punkter) tar integralen hänsyn till funktionens beteende *överallt*.

7.1 På polynomrum

Exempel 14: Integralskalärprodukt på polynomrum

7.2 På funktionsrum

Exempel 15: Integralskalärprodukt på $C[a, b]$

---

8. Sammanfattning: checklista för skalärprodukter

Kontroll	Fråga att ställa
Symmetri	Är $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$?
Additivitet	Kan vi "bryta ut" en summa?
Homogenitet	Kan vi "dra ut" en skalär?
Positivdefinithet	Är $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ för alla $\vec{u} \neq \vec{0}$?

⚠ **Vanligaste fallgropen**

Axiom 4 är nästan alltid det axiom som bryter. Kontrollera alltid:

- **Viktad skalärprodukt:** Alla vikter strikt positiva?
- **Evalueringsskalärprodukt:** Tillräckligt många distinkta punkter?
- **Matrisbaserad:** Är matrisen inverterbar?

---

9. Skalärprodukt på matrisrum – spåret

Förutom $\mathbb{R}^n$, polynomrum och funktionsrum kan man definiera skalärprodukter på **matrisrum**. Den viktigaste konstruktionen använder **spåret** (trace).

9.1 Definition via spåret

Definition: Frobenius-skalärprodukt

Definiera på $M_{m \times n}$ (alla $m \times n$-matriser):

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$$

där tr betecknar spåret — summan av diagonalelementen.

Varför fungerar detta? Om vi "vecklar ut" matriserna till vektorer i $\mathbb{R}^{mn}$ (genom att stapla kolumnerna) motsvarar $\mathrm{tr}(A^T B)$ precis standardskalärprodukten av de utvecklade vektorerna. Det beror på att $(A^T B)_{ii} = \sum_k a_{ki} b_{ki}$, och summan av diagonalelementen ger $\mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,k} a_{ki} b_{ki}$ — precis den elementvisa produktens summa.

Exempel 16: Skalärprodukt på $M_{2\times 2}$ via spåret ›

10. Beräkningsexempel: norm och avstånd

Nu tillämpar vi skalärprodukten för att beräkna **norm** (längd) och **avstånd** i olika rum.

Exempel 17: Norm och avstånd i $\mathbb{P}_2$ med evalueringsskalärprodukt ›

11. Bästa approximation — tillämpning av skalärprodukten

En av de viktigaste tillämpningarna av skalärprodukter är att hitta den **bästa approximationen** av en funktion med ett polynom. Idén är att minimera avståndet (i skalärproduktens mening) mellan funktionen och polynomet.

Exempel 18: Approximera e^x med ett andragradspolynom ›

12. Centrala olikheter och satser

I ett allmänt inre produktrum gäller samma fundamentala olikheter som i $\mathbb{R}^n$. Dessa olikheter följer **enbart** från de fyra axiomen — de gäller i alla inre produktrum oavsett om vi jobbar med vektorer, polynom, matriser eller funktioner.

12.1 Cauchy-Schwarz olikhet

Sats: Cauchy–Schwarz olikhet

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalärprodukt på V. Då gäller för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$\boxed{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

med likhet om och bara om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt beroende (dvs. den ena är en skalär multipel av den andra, eller en av dem är nollvektorn).

Bevisidé: Om $\vec{v} = \vec{0}$ gäller olikheten trivialt (båda sidor är noll). Antag $\vec{v} \neq \vec{0}$ och betrakta vektorn $\vec{w} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$ (ortogonala projektionens residual). Axiom 4 ger $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0$. Att utveckla denna olikhet med hjälp av bilinjäriteten ger exakt Cauchy–Schwarz olikhet.

Specialfall i $\mathbb{R}^n$: Med standardskalärprodukten återfås den klassiska Cauchy–Schwarz olikheten:

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Tolkning: Cauchy–Schwarz begränsar hur “parallella” två vektorer kan vara relativt sina normer. I $\mathbb{R}^n$ med standardprodukten kan man definiera vinkeln θ mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ via $\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, och olikheten säger att $|\cos\theta| \leq 1$ – helt konsekvent med att cosinus alltid ligger mellan -1 och 1. I allmänna inre produktrum (polynom, funktioner) saknas geometrisk vinkel, men Cauchy–Schwarz gäller ändå och kan användas som en **generaliserad vinkeldefinition**.

12.2 Triangelolikheten

Sats: Triangelolikheten

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalärprodukt på V. Då gäller för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$\boxed{\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$$

Bevis:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$$

Använd Cauchy–Schwarz: $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \leq |\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$:

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Ta roten ur båda sidor (båda icke-negativa):

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \qquad \blacksquare$$

Följdsats — triangelolikheten för avstånd:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$

Bevis av följdsatsen: Sätt $\vec{a} = \vec{u} - \vec{w}$ och $\vec{b} = \vec{w} - \vec{v}$. Då ger triangelolikheten:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$

Tolkning: Triangelolikheten säger att den raka vägen alltid är kortast — att gå via en mellanpunkt $\vec{w}$ kan aldrig ge ett kortare avstånd. Namnet kommer från att i en triangel med hörn $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är varje sida kortare än summan av de andra två. Denna olikhet gäller i alla inre produktrum och är fundamental för att normen verkligen ska bete sig som en "längd".

12.3 Pythagorassatsen (generaliserad)

Sats: Pythagorassatsen

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalärprodukt på V. Då gäller:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \iff \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2}$$

(Ortogonalitet $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$ är ekvivalent med att Pythagoras sats gäller.)

Bevis:

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = ||\vec{u}||^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + ||\vec{v}||^2$$

Likhet med $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ gäller om och bara om $2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$, dvs. $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$, dvs. $\vec{u} \perp \vec{v}$. ■

Tolkning: I $\mathbb{R}^2$ med standardprodukten ger detta den klassiska Pythagoras sats för rätvinkliga trianglar. Men satsen gäller i **alla** inre produktrum: om två polynom är ortogonala (deras skalärprodukt är noll) gäller att "normen av summan i kvadrat = summan av normerna i kvadrat". Pythagorassatsen generaliseras även till fler än två vektorer: om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ är **parvis ortogonala**, så gäller

$$||\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_k||^2 = ||\vec{v}_1||^2 + ||\vec{v}_2||^2 + \cdots + ||\vec{v}_k||^2$$

---

13. Ortogonala och ortonormala mängder

13.1 Definition

Definition: Ortogonal mängd

En mängd vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ i ett inre produktrum V kallas **ortogonal** om vektorerna är **parvis ortogonala**:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = 0 \quad \text{för alla } i \neq j$$

(Varje par av distinkta vektorer i mängden har skalärprodukt noll.)

Definition: Ortonormal mängd

En ortogonal mängd kallas **ortonormal** om dessutom varje vektor har norm 1:

$$||\vec{v}_i|| = 1 \quad \text{för alla } i$$

Ekvivalent:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} kallas **Kronecker-delta**.)

Tolkning: En ortogonal mängd är en samling vektorer som alla är vinkelräta mot varandra — en generalisering av koordinataxlarna i $\mathbb{R}^n$. En ortonormal mängd är dessutom “normaliserad” så att varje vektor har enhetslängd. Standardbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ är det enklaste exemplet på en ortonormal mängd.

13.2 Varför är ortogonala mängder viktiga?

Sats: Ortogonala nollskilda vektorer är `linjärt oberoende`

Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ är en ortogonal mängd och ingen vektor är nollvektorn, så är mängden **linjärt oberoende**.

Bevis: Antag att $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$. Ta skalärprodukten med $\vec{v}_j$ på båda sidor:

$$\langle c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v}_j \rangle = 0$$

Bilinjäriteten ger: $c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \cdots + c_k\langle \vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle = 0$.

Alla termer utom den j:te försvinner på grund av ortogonaliteten ($\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ för $i \neq j$):

$$c_j\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = 0$$

Eftersom $\vec{v}_j \neq \vec{0}$ gäller $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle > 0$ (axiom 4), så $c_j = 0$. Detta gäller för alla j, alltså $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. ■

Praktisk konsekvens: Om vi har en ortogonal mängd med n nollskilda vektorer i ett n-dimensionellt inre produktrum, bildar den automatiskt en **bas** — en **ortogonal bas**. Och om vi dessutom normaliserar vektorerna till enhetslängd får vi en **ortonormal bas**.

13.3 Räkneexempel

Exempel 19: Visa att en mängd är ortogonal i $\mathbb{R}^3$ >

Exempel 20: Ortogonal mängd i $\mathbb{R}^3$ — korrekt verifiering >

13.4 Fördelen med ortonormala baser

Om $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ är en **ortonormal bas** för ett inre produktrum V blir koordinatberäkningen extremt enkel:

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} \langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}, \vec{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Koordinaterna fås genom skalärprodukter — **ingen Gausselimination behövs!**

Varför? Om $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$ och vi tar skalärprodukten med $\vec{v}_j$:

$$\langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle = c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \cdots + c_n\langle \vec{v}_n, \vec{v}_j \rangle = c_j \cdot 1 = c_j$$

(Alla termer utom den j:te försvinner tack vare ortogonaliteten, och den j:te förenklas tack vare $||\vec{v}_j|| = 1$.)

---

14. Sammanfattning: checklista för skalärprodukter

Kontroll	Fråga att ställa
Symmetri	Är $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$?
Additivitet	Kan vi "bryta ut" en summa?
Homogenitet	Kan vi "dra ut" en skalär?
Positivdefinithet	Är $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ för alla $\vec{u} \neq \vec{0}$?

⚠ **Vanligaste fallgropen**

Axiom 4 är nästan alltid det axiom som bryter. Kontrollera alltid:

- **Viktad skalärprodukt:** Alla vikter strikt positiva?
- **Evalueringsskalärprodukt:** Tillräckligt många distinkta punkter?
- **Matrisbaserad:** Är matrisen inverterbar?

Sammanfattning av skalärprodukter vi har sett

Rum	Skalärprodukt	Krav
$\mathbb{R}^n$ (standard)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i v_i$	Inga extra
$\mathbb{R}^n$ (viktad)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum w_i u_i v_i$	$w_i > 0$
$\mathbb{R}^n$ (matrisbaserad)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v})$	A inverterbar
$\mathbb{P}_n$ (evaluering)	$\langle p, q \rangle = \sum w_i p(x_i) q(x_i)$	$\geq n+1$ distinkta punkter, $w_i > 0$
$\mathbb{P}_n$ eller $C[a,b]$ (integral)	$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\,dx$	Inga extra
$M_{m\times n}$ (Frobenius)	$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$	Inga extra

---

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Abstract vector spaces — varför abstrakta vektorrum och funktionsrum beter sig som $\mathbb{R}^n$
- 3Blue1Brown: Dot products and duality — skalärprodukt och projektion visuellt
- MIT 18.06SC: Orthogonal Vectors and Subspaces (Gilbert Strang) — ortogonalitet och inre produkt

- MIT 18.06SC: Projection Matrices and Least Squares (Gilbert Strang) — bästa approximation och normalekvationer

Wikipedia

- Inner product space
- Dot product
- Cauchy–Schwarz inequality
- Orthonormality
- Frobenius inner product
- Function space

Fördjupning

- Kursbok kap 6.1 — fullständig genomgång av inre produktrum med bevis
- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Inner Products
- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Orthogonal Sets