

Stokes sats

Jun 23, 2026, 4 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Divergens och rotation, Kurvintegraler av vektorfält, Ytintegraler, Orientering (kurvor och ytor)

1. Idén – randens cirkulation lika med inre rotation

Stokes sats är den tredimensionella generaliseringen av **Greens sats**. Den säger att den totala "snurren" $\nabla \times \vec{F}$ summerad över en yta är detsamma som *cirkulationen* av \vec{F} längs ytans rand.

Grundtanken

Rotation är ett *lokalt* mått på hur fältet snurrar runt en punkt. När man summerar rotationen över en yta tar grannrotationer ut varandra i det inre, och det enda som blir kvar är hur fältet rör sig längs randen. Det är *exakt* vad satsen säger.

Det är samma princip som i **Gauss sats** – lokala bidrag tar ut varandra i det inre och bara randen överlever.

Lokalt

Globalt

rotation $\nabla \times \vec{F}$

flöde $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

fältet längs randen $\vec{F} \cdot \vec{T}$

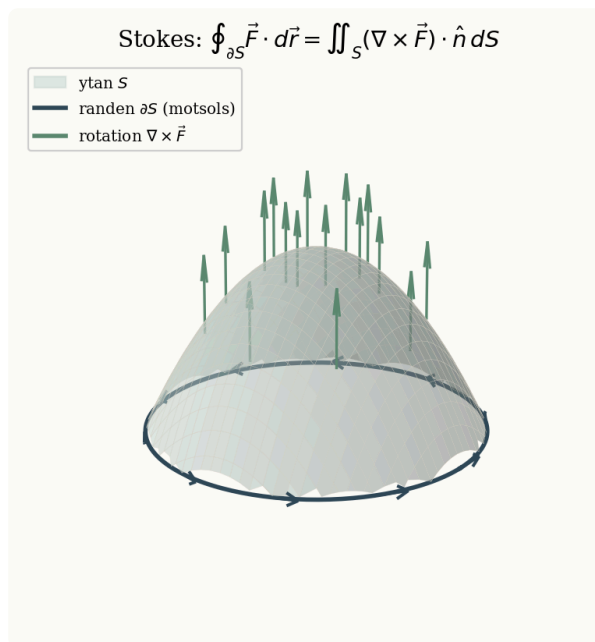
cirkulation $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2. Satsen

Stokes sats

Låt S vara en orienterad styckvis slät yta i \mathbb{R}^3 med styckvis slät rand ∂S , orienterad konsekvent enligt högerhandsregeln (se **Orientering (kurvor och ytor)**). Låt \vec{F} vara ett C^1 -vektorfält på en omgivning av S . Då

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) \cdot \hat{N} dA$$



I bilden ser man en paraboloid-cap med rotationens flödesvektor pekande uppåt genom ytan, och randcirkeln traverserad motsols sett uppifrån – exakt högerhandsorienteringen.

3. Specialfall – Greens sats

Om S ligger plant i xy -planet med uppåtorientering, så är $d\vec{S} = \hat{k} dA$ och $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$. Stokes sats blir då

$$\oint_{\partial S} (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_S (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dA,$$

vilket är exakt **Greens sats**. Stokes är alltså Greens uttalad i ett varv högre dimension.

4. Konsekvens – ytan spelar ingen roll

En vacker konsekvens: om S_1 och S_2 är två ytor med *samma* rand C och samma orientering, så ger Stokes sats *samma* värde:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Detta är användbart i praktiken – man kan välja den ytan som ger lättast räkning (t.ex. en plan disk istället för en bula).

Konservativa fält

Om \vec{F} är konservativt är $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, så cirkulationen längs *varje* slutna kurva är noll. Det är förklaringen till varför kurvintegralen då bara beror på ändpunkterna.

5. Exempel

 [Exempel 1 – ren kontroll](#) >

 [Exempel 2 – bytt yta, samma resultat](#) >

6. När är Stokes sats användbar?

Tre situationer där satsen sparar arbete

1. **Krångligt vektorfält längs randen, enkel rotation.** Är $\nabla \times \vec{F}$ enkel (eller noll) blir högersidan trivial även när vänstersidan ser besvärlig ut.
2. **Krånglig rand, enkel rotation över en enkel yta.** Om ∂S består av många delar kan man slippa kurvintegralen helt via \iint_S .
3. **Bytt yta.** Behöver du beräkna en ytintegral $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$? Byt S mot en *enklare* yta med samma rand – kanske en plan disk. Samma rand \Rightarrow samma värde.

7. Räknetod

Räkneschema

1. **Identifiera S och ∂S** – och kolla att randen är *en* sluten kurva (eller flera, då med rätt tecken).
2. **Bestäm orienteringen** av S (välj normal) och därmed av ∂S (högerhandsregel).
3. **Räkna rotationen** $\nabla \times \vec{F}$ – eller observera att den är noll.
4. **Välj sida av satsen** beroende på vad som är enklast – ytintegralen eller kurvintegralen.
5. **Räkna.**

Krav på fältet

Stokes sats kräver C^1 på en omgivning av *hela* S – inte bara randen. Om \vec{F} är singulärt i någon punkt på S måste den punkten plockas bort eller satsen tillämpas på ett mindre område.

Läsning



- [17.5 Stokes's Theorem](#)

Se även

- [Greens sats](#)
- [Gauss sats](#)
- [Divergens och rotation](#)
- [Flödesintegraler](#)
- [Kurvintegraler av vektorfält](#)
- [Orientering \(kurvor och ytor\)](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Divergence and curl](#)

- [Khan Academy: Stokes' theorem](#) 
 - [Wikipedia: Stokes' theorem](#) 
-