

Taylorutveckling

Jun 23, 2026, 2 min read

#matematik

#optimering

#envariabelanalys

#taylorutveckling

#approximation

#flervariabelanalys

Kurs: M0065M Förkunskaper: Derivata, Gränsvärden

1. Idé

Taylorpolynom används för att approximera en funktion nära en punkt a med ett polynom som har samma värde och samma derivator där.

Definition

Taylorpolynomet av grad n kring a är

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Specialfallet $a = 0$ kallas **Maclaurinpolynom**.

2. Varför formeln ser ut så

Koefficienterna väljs så att

$$T_n(a) = f(a), \quad T'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Faktorn $k!$ behövs för att k derivator av termen $(x - a)^k$ ska ge tillbaka rätt koefficient.

3. Standardexempel

≡ e^x kring 0 >

≡ $\sin x$ kring 0 >

≡ $\ln x$ kring 1 | >

4. Restterm och fel

Taylorpolynomet är en approximation, så man skriver

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

där $R_n(x)$ är resttermen.

I Lagranges form gäller

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

för något tal ξ mellan a och x .

Det gör att man kan uppskatta felet.

5. Användningar

Taylorpolynom används för att:

- approximera svåra funktioner med polynom
- beräkna gränsvärden
- beskriva lokalt beteende nära en punkt
- bygga intuition för varför vissa standardgränsvärden gäller

6. Standardutvecklingar att känna igen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (|x| < 1)$$

Läsning

- [4.10 Taylor Polynomials](#)
- [13.9 Taylor's Formula](#)

Se även

- [Derivata](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Extremvärden](#)

Resurser

- [Khan Academy: Taylor and Maclaurin polynomials](#) [↗](#)
 - [Wikipedia: Taylor series](#) [↗](#)
-

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-04-10, M0068M Föreläsare: Thomas Strömberg

2026-04-10 - Föreläsning 9 (Taylorpolynom av 2:a ordning för $f(x, y)$)

Repetition: Taylorpolynom i en variabel

$$P_1(x) = g(a) + g'(a)(x - a) \quad P_2(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2$$

Taylorpolynom av 2:a ordning för $f(x, y)$

$$P(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}(f_{11}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{12}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{22}(a, b)(y - b)^2)$$

Villkor som uppfylls:

- $P(a, b) = f(a, b)$
- $P_1(a, b) = f_1(a, b), P_2(a, b) = f_2(a, b)$
- $P_{11} = f_{11}, P_{12} = f_{12}, P_{22} = f_{22}$

Taylorutveckling

$f(x, y) \approx P(x, y) + \text{restterm}$ då (x, y) nära (a, b)

Kvadratisk form Q (alternativt skrivsätt): $Q(h, k) =$

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{11}(a, b) & f_{12}(a, b) \\ f_{21}(a, b) & f_{22}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$
