Trippelintegraler

Jun 23, 2026, 4 min read

#matematik #flervariabelanalys #integral

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Dubbelintegraler

---

1. Idén bakom trippelintegralen

En enkel integral summerar funktionsvärden längs en linje, en dubbelintegral längs ett område i planet, och en trippelintegral längs ett område i rummet. I varje steg är det *en dimension mer* för domänen, men funktionen f själv ändrar inte karaktär.

> **Grundtanken**
>
> Man summerar f:s värden i varje punkt i ett 3D-område och viktar med ett litet volymelement dV. Resultatet är en *skalär* — inte en bild i någon högre dimension.

Geometrisk tolkning

Geometriskt har vi kunnat tolka en enkel integral som en *area* och en dubbelintegral som en *volym*. Då borde en trippelintegral beskriva något i den fjärde dimensionen — något som är betydligt skummare att visualisera än de tidigare fallen. Därför föreslår Stephan McCormick ett alternativt sätt att se trippelintegralen.

Anledningen att integralen är en dimension högre än funktionen är att man summerar funktionsvärden i varje punkt och lyfter värdena som en egen dimension. Man ska fortfarande (om man kan) rita upp en bild för att föreställa sig domänen — *från vad till vad ska jag integrera?* Det hjälper också med valet av koordinatsystem.

Det är möjligt att beskriva en trippelintegral som en hypervolym, men det är sällan lämpligt.

---

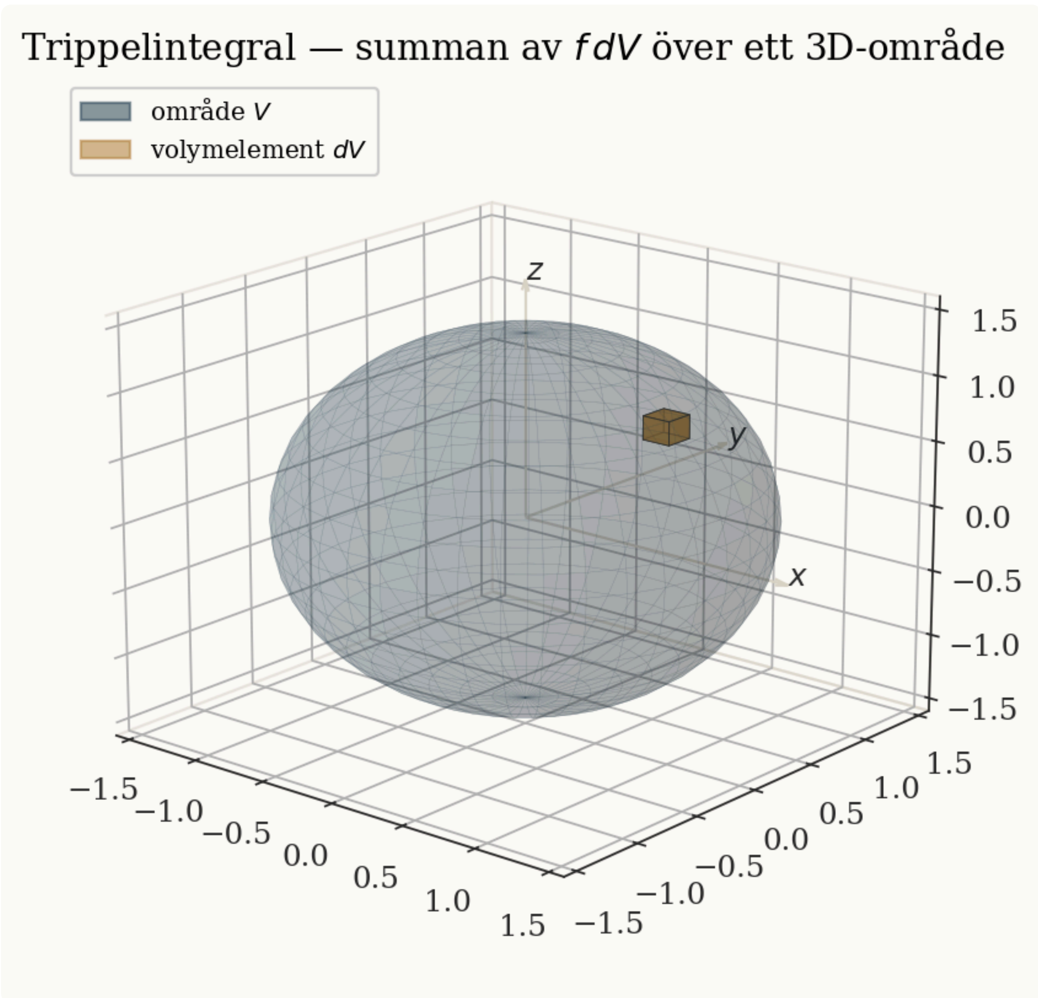
2. Definition

Integralen av en funktion f över ett område $V \subset \mathbb{R}^3$ skrivs

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z)\, dV}$$

och tolkas som summan av f:s värden viktade med ett volymelement dV över hela V. I kartesiska koordinater är $dV = dx\, dy\, dz$.

> **Specialfall — volym**
>
> Med $f \equiv 1$ blir integralen *volymen* av V:
>
> $$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1\, dV.$$



3. Itererad integration (Fubini)

Om V kan beskrivas av nästlade gränser

$$a \le x \le b, \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x), \qquad h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y),$$

ger Fubinis sats att integralen kan skrivas som tre itererade enkelintegraler:

$$\iiint_V f\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Ordning får väljas

Vilken variabel som integreras *innerst* är fritt att välja — det är samma integral oavsett. Välj ordning så att gränserna blir så enkla som möjligt; ofta avgör områdets form vad som är lättast.

Vanlig fallgrop

När man byter integrationsordning måste alla gränser översättas — *både inre och yttre*. En blandning av gränser från två olika ordningar är en av de vanligaste felkällorna.

4. Vanliga koordinatsystem

För områden med rotations- eller sfärisk symmetri lönar sig nästan alltid ett variabelbyte (se Variabelbyte i trippelintegraler).

Koordinater	Variabler	Volymelement
Kartesiska	(x,y,z)	$dV = dx\,dy\,dz$
Cylindriska	(r,θ,z)	$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$
Sfäriska	(ρ,ϕ,θ)	$dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

5. Exempel

Exempel 1 — tetraedern $x + y + z \le 1$ i första oktanten

Exempel 2 — volym mellan paraboloid och plan

6. Användning

- **Volym** av V — sätt $f = 1$.
- **Massa** av kropp med densitet $\rho(x, y, z)$: $m = \iiint_V \rho \, dV$.
- Masscentrum av kropp: $\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_V x \, \rho \, dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_V y \, \rho \, dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_V z \, \rho \, dV.$
- Tröghetsmoment kring en axel.
- **Sannolikheter** för 3D-fördelningar i statistik.

7. Metodik — steg för steg

Hur man räknar en trippelintegral

1. **Rita området.** Identifiera vilket koordinatsystem som passar (kartesiskt, cylindriskt, sfäriskt).
2. **Välj integrationsordning.** Inre variabel ska ha gränser som är enklast.
3. **Sätt upp gränserna.** Yttersta gränsen är konstanter; varje inre gräns får bero på de yttre variablerna.
4. **Beräkna inifrån och ut**, en enkelintegral i taget.
5. **Kontrollera.** Sätt $f = 1$ för en sanity-check mot kända volymformler.

Läsning

- 15.5 Triple Integrals

Se även

- Dubbelintegraler
- Variabelbyte i trippelintegraler
- Hypervolym
- Masscentrum
- Masströghetsmoment

Resurser

- Khan Academy: Triple integrals
- Wikipedia: Multiple integral