

Variabelbyte i dubbelintegraler

Jun 23, 2026, 11 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#integral

Kurs: M0068M Förkunskaper: [Dubbelintegraler](#), [Kryssprodukt](#)

1. Idén bakom variabelbytet

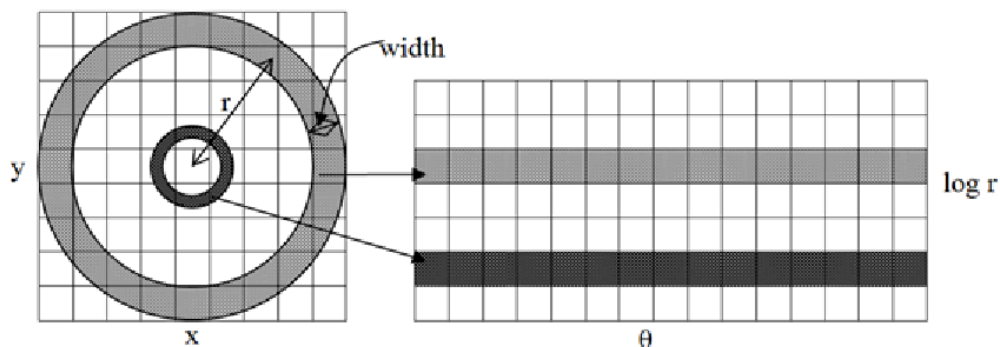
En dubbelintegral

$$\iint_D f(x, y) dA$$

kan vara obekvämt att beräkna direkt om antingen *integranden* f eller *området* D uttrycker sig dåligt i kartesiska koordinater (x, y) . Variabelbytet handlar om att hitta nya koordinater (u, v) där problemet blir geometriskt enklare - ofta så att D blir en *rektangel* i de nya koordinaterna och så att integranden tar en kortare form.

Grundtanken

Vi byter koordinatsystem för att få en bättre geometri. En cirkulär ring i (x, y) -planet blir t.ex. en *rektangel* i (r, θ) -planet – och rektanglar är mycket lättare att integrera över.



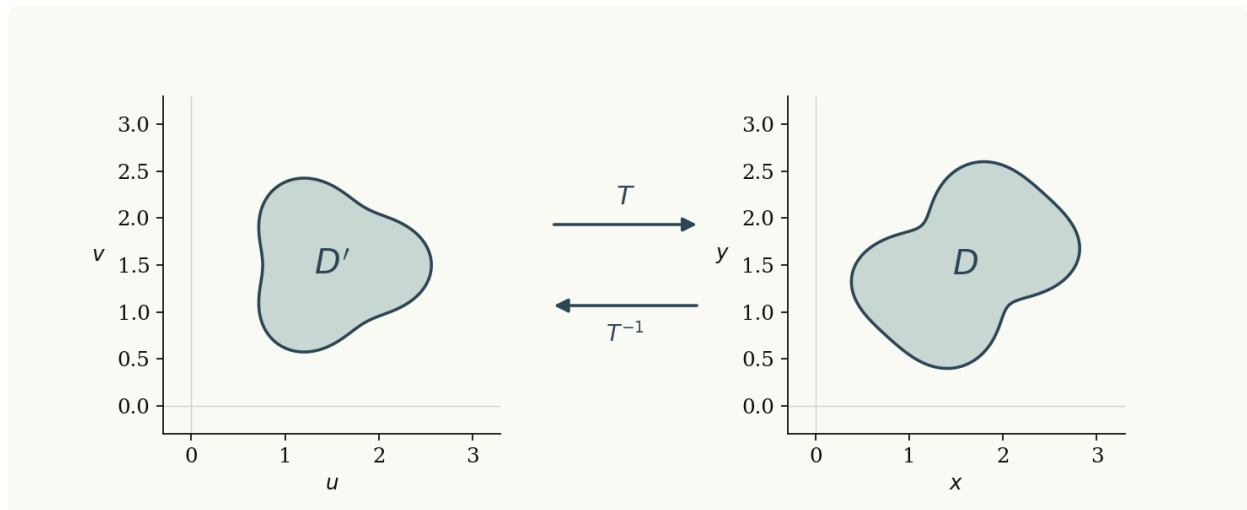
Pris för bytet: areaelementet dA förvrids när vi byter koordinater. Ett litet rektangelement $du dv$ i (u, v) -planet motsvarar i regel *inte* ett lika stort $dx dy$ i (x, y) -planet. Den lokala skalfaktorn ges av **Jacobianens determinant**, som vi härleder nedan.

2. Transformationen T

Ett variabelbyte beskrivs av en avbildning

$$T : (u, v) \mapsto (x, y), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

som kartlägger ett område D' i (u, v) -planet bijektivt på D i (x, y) -planet.



Pilarna visar hur T mappar D' framåt på D och hur inversen T^{-1} mappar tillbaka. Tanken är *inte* att T ska vara enkel – den får gärna förvrída saker – utan att D' ska ha en *enkelt parametriserbar form* (oftast en rektangel).

För att substitutionsformeln ska gälla kräver vi att T är

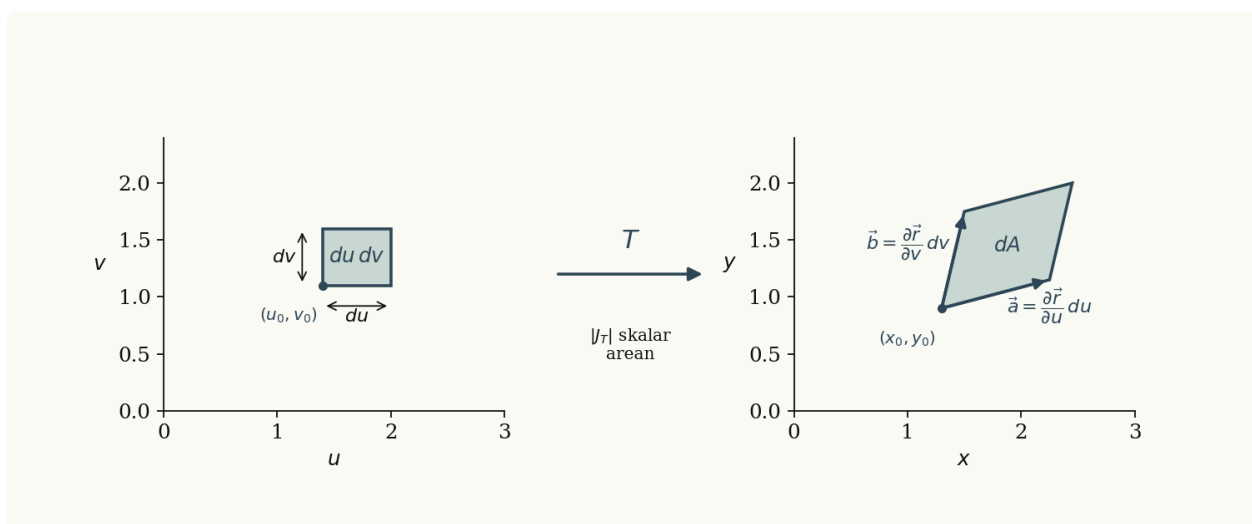
- **bijektiv** (entydigt inverterbar) på det inre av D' ,
- **kontinuerligt deriverbar** (C^1),
- har **icke-singulär** Jacobian, dvs. $\det J_T \neq 0$.

 Note

Att T får misslyckas med kraven på en mängd med *area noll* är vad som tillåter polära koordinater (där origo är degenererat – alla θ ger samma punkt) och flera andra standardbyten.

3. Härledning av areaelementet

Vi vill veta hur en liten rektangel med sidor du och dv i (u, v) -planet blir när den avbildas till (x, y) -planet.



Bilden ovan är hela idén i en blink: en liten rektangel med sidorna du och dv i (u, v) -planet avbildas approximativt på en *parallelogram* i (x, y) -planet, vars sidor är tangentvektorerna \vec{a} och \vec{b} . Vår uppgift är att uttrycka parallelogrammets area i termer av du , dv och derivatorna av T .

Skriv positionsvektorn i kartesiska koordinater som

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}.$$

Längs riktningen där bara u varierar (med $v = v_0$ fixt) ger en linjär approximation tangentvektorn

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u \\ \partial y / \partial u \end{pmatrix} du,$$

och längs riktningen där bara v varierar

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \begin{pmatrix} \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial v \end{pmatrix} dv.$$

Den lilla parallelogram som \vec{a} och \vec{b} spänner upp har arean given av **kryssproduktens** belopp:

$$dA = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{pmatrix} \right| du dv.$$

Determinanten i mitten kallas **Jacobianens determinant** för T :

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Tolkning av $|J_T|$

$|J_T(u_0, v_0)|$ är *den lokala arealförstärkningsfaktorn* – hur mycket en liten yta i (u, v) -planet blåses upp eller krymper när den avbildas till (x, y) -planet vid punkten (u_0, v_0) .

- $|J_T| = 1$: bytet är *areabevarande* lokalt.
- $|J_T| > 1$: ytan blåses upp.
- $|J_T| < 1$: ytan krymper.

4. Substitutionsformeln

Med ovanstående resultat blir den fullständiga formeln:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J_T| du dv$$

Lägg märke till tre saker:

1. **Områdets ändras:** integralen i högerled går över D' , inte D .

2. **Integranden uttrycks i nya variabler:** $f(x(u, v), y(u, v))$.

3. **Areaelementet bär en faktor:** $|J_T| du dv$ ersätter dA .

⚠ Glöm inte absolutbeloppet

Det är *absolutbeloppet* $|J_T|$ som ska användas — areor är alltid positiva, oavsett hur transformationen orienterar planet. Tecknet på J_T säger något om *orientering*, inte om area.

5. Polära koordinater

Det vanligaste variabelbytet i kursen är **polära koordinater**:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

med $r \geq 0$ och $\theta \in [0, 2\pi)$. Se **Polära koordinater** för bakgrund.

Jacobianens determinant blir

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

så

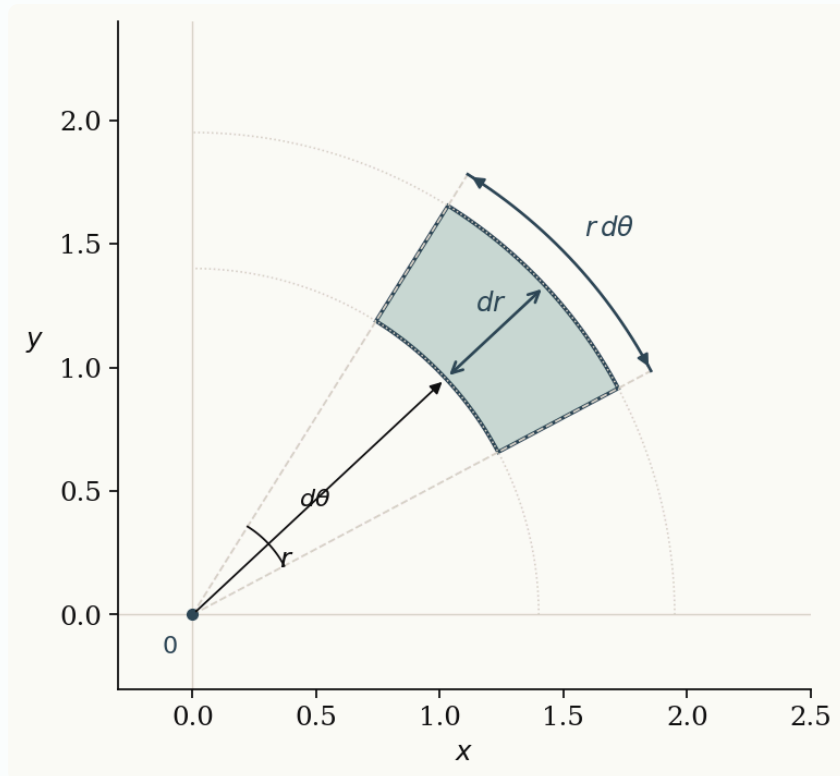
$$dA = r dr d\theta$$

🔗 Geometrisk bild av faktorn r

Ett litet "polart rektangelement" är en *cirkelsektor* med inre radie r , tjocklek dr och vinkelbredd $d\theta$. Sektorns båglängd är $r d\theta$, så arean blir

$$\Delta A \approx \underbrace{r d\theta}_{\text{båglängd}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{tjocklek}} = r dr d\theta.$$

Faktorn r kompenserar alltså för att sektorerna är *större* längre ut från origo.



☰ [Exempel 1 – integral över enhetsskivan](#) >

☰ [Exempel 2 – kvartsring \(och varför Jacobianen \$r\$ "stämmer"\)](#) >

☰ [Exempel 3 – Gaussintegralen](#) >

☰ [Exempel 4 – area mellan fyra parabler](#) >

6. Generaliserade polära koordinater (ellips)

För en ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ använder man

$$x = a r \cos \theta, \quad y = b r \sin \theta,$$

vilket ger

$$J_T = \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{pmatrix} = abr,$$

så

$$dA = ab r dr d\theta$$

Området $D' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ är då en *enhetsskiva* i (r, θ) -planet – typiskt mycket enklare än ellipsen.

☰ [Exempel 5 – arean av en ellips](#) >

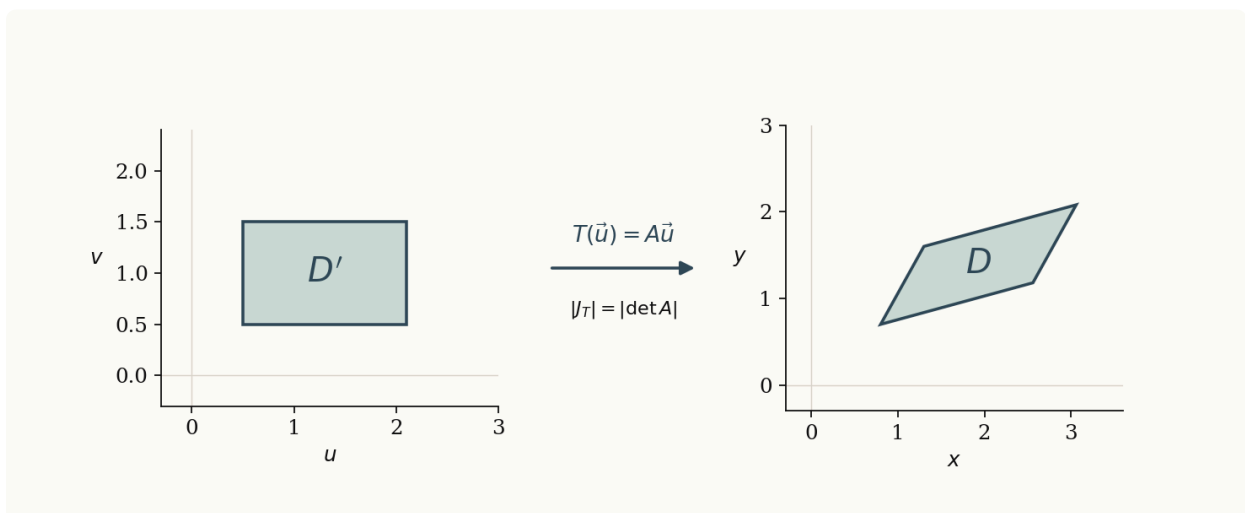
7. Andra användbara byten

Affina (linjära) byten

Om D är begränsad av räta linjer som inte är axelparallella kan ett *linjärt* byte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

förvandla D till en rektangel. Här är $J_T = \det A$, en *konstant* – den lokala skalfaktorn är samma överallt.



Ett affint byte deformerar alltså rektangeln likformigt: alla små rektanglar i D' blir parallelogram av samma form i D . Det är därför Jacobianen blir konstant och inte beror på position.

Sum- och differensbyte

Bytet $u = x + y$, $v = x - y$ är vanligt när integranden eller området innehåller just de kombinationerna. Inversen är

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{u - v}{2},$$

och

$$J_T = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad |J_T| = \frac{1}{2}.$$

Hyperboliska / produktbyten

Vid områden begränsade av kurvor som $xy = c$ kan $u = xy$, $v = y/x$ vara naturligt. Sådana byten kräver oftast lite arbete med Jacobianen – räkna noggrant.

Strategi för val av byte

Variabelbytet ska göra antingen *integranden* eller *området* enklare – gärna båda. Identifiera först områdets symmetri:

- Cirkulär symmetri \Rightarrow polära koordinater.
- Elliptisk symmetri \Rightarrow generaliserade polära.
- Begränsad av räta linjer \Rightarrow affint byte.
- Integranden innehåller $x + y$, xy , y/x , etc. \Rightarrow låt dessa kombinationer vara nya variabler.

8. Metodik – steg för steg

Hur man genomför ett variabelbyte

1. **Välj transformationen** $(x, y) = T(u, v)$ utifrån områdets symmetri eller integrandens form.
2. **Översätt området:** hitta D' i (u, v) -planet så att $T(D') = D$. Rita gärna båda områdena bredvid varandra.
3. **Beräkna Jacobianens determinant** J_T och ta absolutbeloppet $|J_T|$.
4. **Skriv om integranden** $f(x, y)$ i de nya variablerna: $f(x(u, v), y(u, v))$.
5. **Skriv ihop integralen** med $|J_T| du dv$ och beräkna den itererat över D' .
6. **Kontrollera:** jämför enheter, gör en rimlighetskontroll med en känd integral (t.ex. $\iint_D 1 dA = \text{area}(D)$).

⚠ Vanliga fallgropar

- Glömt att uppdatera *gränserna* till D' .
- Glömt $|J_T|$ – utan den blir resultatet fel storleksordning.
- Vid polära koordinater: tillåtit $r < 0$. Om man gör det kan man råka täcka planet två gånger.
- T inte injektiv på D' – kontrollera att inverteringen är entydig (utom på en mängd med area noll).

9. Sammanfattning

Den allmänna substitutionsformeln är

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv$$

med standardfallen sammanfattade i tabellen:

Byte	Formel	dA
Polärt	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	$r dr d\theta$
Generaliserat polärt	$x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$	$ab r dr d\theta$
Affint	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	$\$$

Byte	Formel	dA
Sum/differens	$u = x + y, v = x - y$	$\frac{1}{2} du dv$

Läsning

- [15.4 Double Integrals in Polar Coordinates](#)
- [15.5 Triple Integrals](#) – för analogi i 3D

Se även

- [Dubbelintegraler](#)
- [Variabelbyte i trippelintegraler](#)
- [Variabelbyte i integraler](#)
- [Polära koordinater](#)
- [Kryssprodukt](#)
- [Kedjeregeln](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Determinanten](#) [↗] – tolkning av determinant som arealskala (Riktigt bra)
 - [Khan Academy: Double integrals in polar](#) [↗]
 - [Wikipedia: Integration by substitution \(multiple variables\)](#) [↗]
-