Variabelbyte i trippelintegraler

Jun 23, 2026, 4 min read

#matematik #flervariabelanalys #integral

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Trippelintegraler, Variabelbyte i dubbelintegraler, Jacobian i 2D

---

1. Idén – direkt analog till 2D

Variabelbytet i 3D är direkt analogt med 2D-fallet (se Variabelbyte i dubbelintegraler): det areaelement som vägdes med $|J_T|$ ersätts av ett *volymelement* som vägs med Jacobianens determinant i 3D.

> **Grundtanken**
>
> Ett område med rotations- eller sfärisk symmetri är obehagligt i kartesiska koordinater men *snällt* i polära/sfäriska. Bytet kostar ett `|J_T|`, men sparar enormt mycket gränssättning.

---

2. Allmän substitutionsformel

För en transformation $T : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ som är bijektiv och C^1 med $\det J_T \neq 0$ gäller

$$\boxed{\iiint_V f\, dV = \iiint_{V'} f\big(T(u, v, w)\big)\, |\det J_T|\, du\, dv\, dw}$$

där

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{pmatrix}.$$

Strategi

Välj koordinater efter områdets symmetri: cylindersymmetri kring en axel ger cylindriska koordinater, sfärisk symmetri kring en punkt ger sfäriska.

---

3. Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy-planet, plus oförändrad z:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

med $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ och $z \in \mathbb{R}$. Jacobianen ärvs från det polära fallet (se Variabelbyte i dubbelintegraler) eftersom z-raden bidrar med en etta:

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r,$$

så

$$\boxed{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

Exempel 1 — volym under paraboloid $z = x^2 + y^2$ inne i cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$

---

4. Sfäriska koordinater

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi,$$

med $\rho \geq 0, \phi \in [0, \pi]$ (polvinkel från $+z$-axeln) och $\theta \in [0, 2\pi)$ (azimutvinkel i xy-planet).

En direkt determinanträkning ger

$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta}$$

Vinkelkonvention

ϕ mäts från positiva z-axeln (polvinkel), θ är azimutvinkeln i xy-planet. Vissa böcker byter rollerna på ϕ och θ — kontrollera alltid bokens definition innan formeln används.

Geometrisk bild av $\rho^2 \sin\phi$

Ett litet sfäriskt rektangelelement har sidor:

- radiell: $d\rho$
- polär (cirkelbåge i meridian): $\rho \, d\phi$
- azimutal (cirkelbåge på en parallell): $\rho \sin\phi \, d\theta$

Volymen blir produkten: $d\rho \cdot \rho \, d\phi \cdot \rho \sin\phi \, d\theta = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$. Faktorn $\sin\phi$ kompenserar för att azimutalcirklarna *krymper* mot polerna.

Exempel 2 — volymen av en boll med radie R >

Exempel 3 — integral av z över halvbollen >

---

5. Generaliserade sfäriska koordinater (ellipsoid)

För en ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

använder man

$$x = a\rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = b\rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = c\rho \cos\phi,$$

vilket ger Jacobianen $abc\rho^2 \sin\phi$, dvs.

$$\boxed{dV = abc\,\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta}$$

Exempel 4 — volymen av en ellipsoid

---

6. Sammanfattning

Byte	Formler	dV
Cylindriska	$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$	$r\,dr\,d\theta\,dz$
Sfäriska	$x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi$	$\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$
Generaliserade sfäriska	$x = a\rho\sin\phi\cos\theta$ etc.	$abc\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

Strategin på en rad

Cylindersymmetri kring en axel ⇒ cylindriska. Sfärisk symmetri kring en punkt ⇒ sfäriska. Ellipsoid ⇒ skala först, sfäriska sedan.

Läsning

- 15.6 Change of Variables in Triple Integrals
- Sfäriska koordinater

- Cylinderkoordinater

Se även

- Trippelintegraler
- Variabelbyte i dubbelintegraler
- Polära koordinater
- Dubbelintegraler

Resurser

- Khan Academy: Triple integrals in spherical coordinates
- Wikipedia: Spherical coordinate system
