Vektorfält

Jun 23, 2026, 4 min read

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

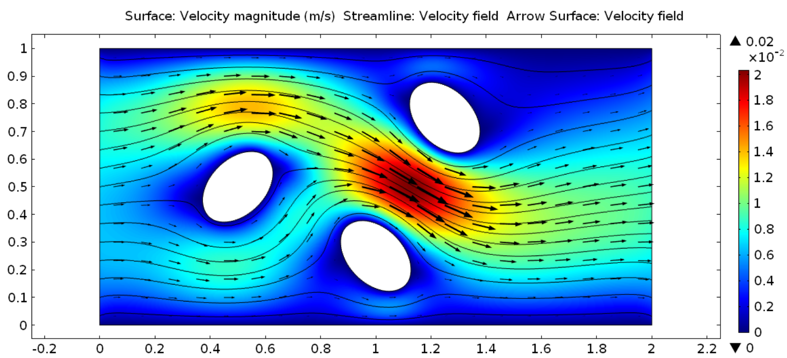
> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Funktioner av flera variabler

---

1. Idén bakom ett vektorfält

En vanlig funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ger ett *tal* i varje punkt — ett skalärfält. Ett vektorfält gör samma sak, men ger en *vektor* i varje punkt.

> **Grundtanken**
>
> Föreställ dig en vätska i rörelse: i varje punkt har vattnet en hastighetsvektor. Det är ett vektorfält. På samma sätt har gravitationen, elektriska fält och magnetfält en *riktning och styrka* i varje punkt — alla är vektorfält.



Hastighetsfält i poröst medium.

---

2. Definition

Ett **vektorfält** är en avbildning som tilldelar varje punkt i rummet en vektor:

$$\vec F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\qquad \vec F(x,y)=\big(P(x,y),\,Q(x,y)\big),$$

eller i 3D

$$\vec F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z)\big).$$

Notation

Vi skriver $\vec F=P\,\hat\imath+Q\,\hat\jmath+R\,\hat k$ eller $\vec F=(P,Q,R)$ omväxlande. Komponenterna P,Q,R är vanliga skalärfunktioner.

Exempel — fältet $\vec F(x,y)=-y\,\hat\imath+x\,\hat\jmath$ ›

Typiska exempelfält

- Hastighetsfält i en vätska.
- Kraftfält (gravitation, elektriskt).
- Gradienten ∇f av en skalärfunktion.

---

3. Integralkurvor — kurva som följer fältet

En naturlig fråga är: vilken kurva $\vec r(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ har $\vec F$ som tangent i varje punkt? Vi kräver

$$\vec r\,'(t)=\lambda(t)\,\vec F\big(\vec r(t)\big).$$

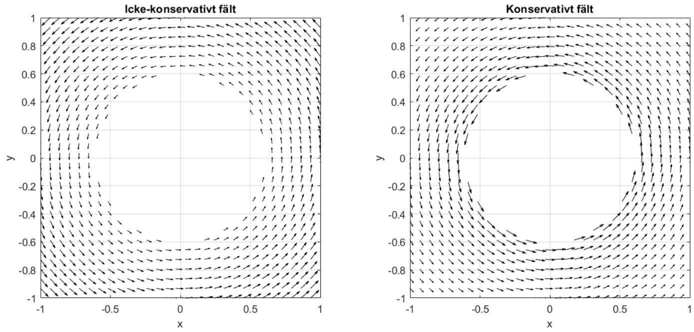
Med $\vec F=(F_1,F_2)$ ger detta

$$\frac{dx}{dt}=\lambda F_1,\qquad \frac{dy}{dt}=\lambda F_2,$$

och genom att dela ekvationerna elimineras parametern:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F_2}{F_1}\quad\Longleftrightarrow\quad\int F_1\,dy=\int F_2\,dx.$$

För exemplet $\vec F=-y\,\hat\imath+x\,\hat\jmath$ ger detta cirkulära flödeslinjer kring origo (radien bevaras), vilket stämmer med bilden av en stelkroppsrotation.



Vektorfält med synliga flödeslinjer.

4. Konservativa fält och skalär potential

Definition

$\vec{F}$ kallas **konservativt** om det finns en skalärfunktion ϕ — en *potential* — så att

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi.$$

ϕ är en sorts "primitiv" till $\vec{F}$; den bestäms upp till en konstant.

Konsekvens — vägoberoende

För ett konservativt fält gäller

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi\big(\vec{r}(b)\big) - \phi\big(\vec{r}(a)\big),$$

dvs. kurvintegralen beror bara på *ändpunkterna*, inte på vägen. Som specialfall blir $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ längs varje sluten kurva.

Exempel — hitta potential till $\vec{F} = (y, x, z^2)$

5. Test för konservativitet

För ett 2D-fält $\vec{F} = F_1\,\hat{\imath} + F_2\,\hat{\jmath}$ med $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ måste blandade andraderivator av ϕ stämma:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Nödvändigt villkor

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$$

Om likheten *inte* gäller är $\vec{F}$ inte konservativt. För 3D kontrolleras alla tre permutationer; det räcker att hitta ett par som inte stämmer för att utesluta konservativitet.

Nödvändigt — inte alltid tillräckligt

Villkoret är *nödvändigt*, men för områden med hål (t.ex. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) räcker det inte. Se virvelfältet i Greens sats — där gäller villkoret men fältet är ändå inte konservativt globalt.

Exempel — visa att $\vec{F} = e^{x^2y}\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ inte är konservativt

---

6. När fältet är "nästan" konservativt

Inte alla fält är konservativa, men ett fält kan ofta delas upp som

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi + \vec{G}$$

där $\vec{\nabla}\phi$ är den konservativa delen och $\vec{G}$ är resten. Den konservativa delen ger noll kring slutna kurvor, så bara $\vec{G}$-delen behöver beräknas direkt.

Exempel — Stephans "weird example" >

7. Sammanfattning

Begrepp	Formel / villkor
Vektorfält	$\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Potential	$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$
Konservativitet (2D, nödv.)	$\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$
Vägoberoende	$\int_C \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(b) - \phi(a)$
Slutna kurvor (konservativt)	$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Läsning

- 16.1 Vector and Scalar Fields
- 16.2 Conservative Fields

Se även

- Gradient och riktningsderivata
- Divergens och rotation
- Kurvintegraler av vektorfält
- Greens sats

Resurser

- 3Blue1Brown: Divergence and curl — geometrisk intuition.
- Khan Academy: Vector fields
- Wikipedia: Vector field