Ytintegraler

Jun 23, 2026, 3 min read

#matematik #flervariabelanalys #integral

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Parametriserade ytor, Dubbelintegraler

---

1. Idén – integrera över en yta istället för ett område

En vanlig dubbelintegral summerar funktionsvärden över ett plant område $D \subset \mathbb{R}^2$. En **ytintegral** gör samma sak, men över en krökt yta S i rummet. Två naturliga tolkningar:

- **Massa**: om S är ett tunt skal med ytdensitet $\rho(x, y, z)$ är massan $\iint_S \rho\, dS$.
- **Medelvärde**: om f representerar en storhet (temperatur, höjd, ...) längs ytan är dess medelvärde $\frac{1}{\text{area}(S)} \iint_S f\, dS$.

Konstrukten är direkt analog till kurvintegralen $\int_C f\, ds$ – bara att vi summerar över en *2D-yta* istället för en 1D-kurva, och båglängdselementet ds ersätts av ett *arealelement* dS.

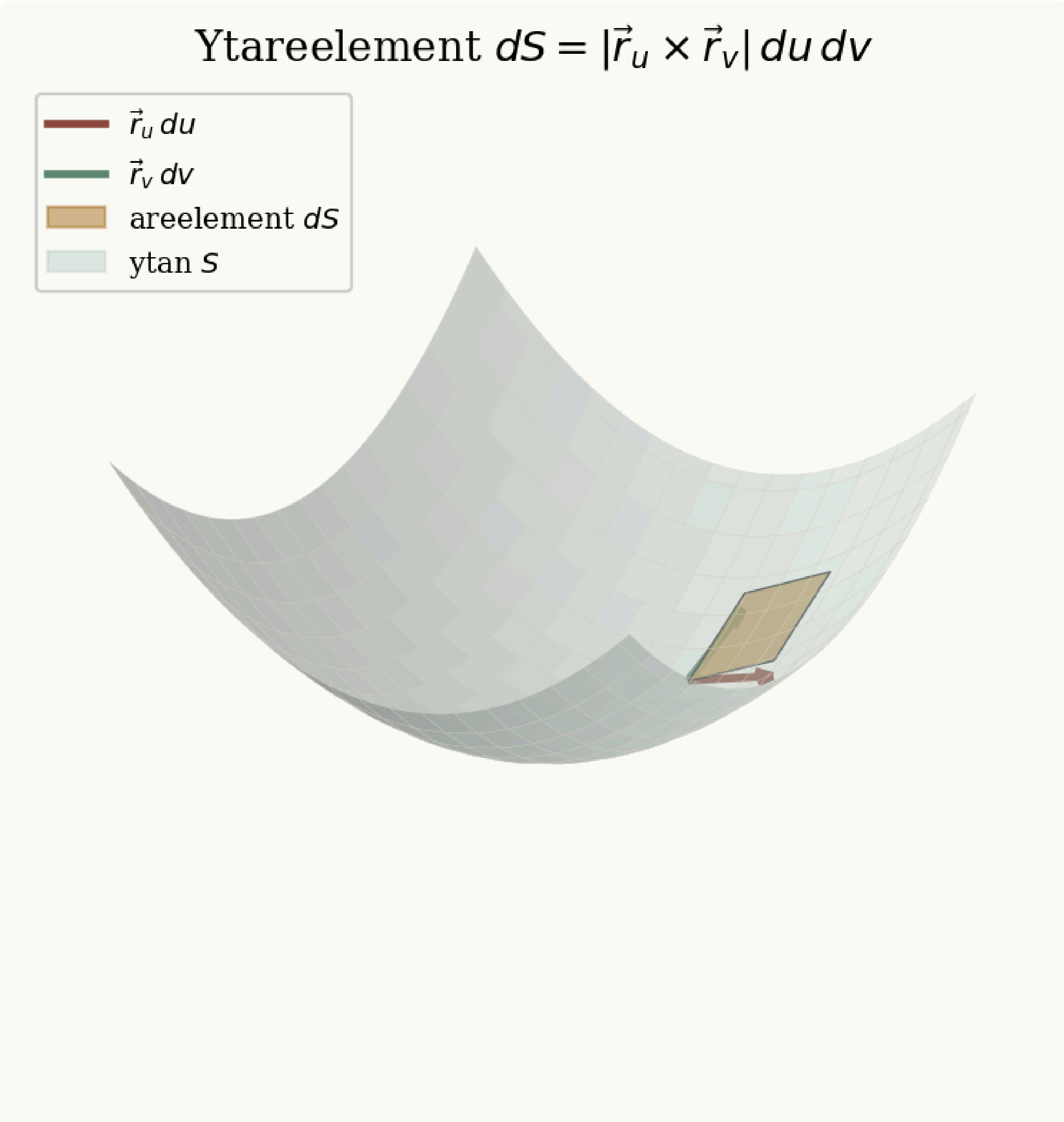
> **Grundtanken**
>
> $\iint_S f\, dS$ summerar f längs ytan, vägt med den lokala arean. När $f \equiv 1$ får man ytans area.

2. Definition via parametrisering

Låt S vara given av en parametrisering $\vec{r}(u, v),\ (u, v) \in D$. Då definieras

$$\boxed{\iint_S f\, dS = \iint_D f\left(\vec{r}(u, v)\right) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv}$$

Faktorn $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ är den lokala arealförstoringen — hur en liten rektangel $du\,dv$ i parameterplanet blir när den lyfts upp på ytan.



I bilden visar den lilla parallellogrammen exakt detta: $\vec{r}_u\,du$ och $\vec{r}_v\,dv$ spänner upp en liten yta vars area är $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,du\,dv = dS$.

3. Användbara specialfall

Graf $z = f(x, y)$ över $D \subset \mathbb{R}^2$

Med parametriseringen $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ blir

$$\boxed{\iint_S g\,dS = \iint_D g\big(x, y, f(x,y)\big)\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy}$$

Sfär av radie R

Med $\vec{r}(\phi, \theta)$ och $dS = R^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta$:

$$\iint_S g\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g\big(\vec{r}(\phi,\theta)\big)\,R^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta.$$

Cylinder av radie R, höjd h

Med $\vec{r}(\theta, z)$ och $dS = R\,d\theta\,dz$:

$$\iint_S g\,dS = \int_0^{h}\int_0^{2\pi} g\big(R\cos\theta, R\sin\theta, z\big)\,R\,d\theta\,dz.$$

4. Egenskaper

Ytintegralen ärver de vanliga räknereglerna från dubbelintegralen:

- **Linjäritet**: $\iint_S (\alpha f + \beta g)\,dS = \alpha\iint_S f\,dS + \beta\iint_S g\,dS$.
- **Additivitet**: om $S = S_1 \cup S_2$ med $S_1 \cap S_2$ av area noll, summerar integralen.
- **Oberoende av parametrisering**: värdet beror bara på S som geometriskt objekt, inte på det val av $\vec{r}(u,v)$ man råkade göra (så länge den täcker S bijektivt utom på en mängd med area noll).
- **Oberoende av orientering**: till skillnad från flödesintegralen *byter inte* $\iint_S f\,dS$ tecken om man vänder normalen. Det är en *skalär* ytintegral.

5. Exempel

Exempel 1 — yta av halvsfär ›

Exempel 2 — area av paraboloid-cap (samma som i Parametriserade ytor) ›

Exempel 3 — massa av ett halvsfäriskt skal

6. Metodik — steg för steg

Räkneschema för $\iint_S f\,dS$

1. **Välj parametrisering** $\vec{r}(u, v)$ och området D.
2. **Beräkna** $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,du\,dv$ — eller använd specialformlerna i §3.
3. **Uttryck** f längs ytan: $f(\vec{r}(u, v))$.
4. **Skriv ner dubbelintegralen** över D och beräkna iterativt.
5. **Sanity-check** med $f \equiv 1$ — då ska du få area(S).

Vanliga fallgropar

- Glömmer $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ — utan den blir resultatet bara dubbelintegralen i parameterplanet.
- Använder $dS = dA$ utan att fundera över krökningen — funkar bara för plana ytor.
- Slarvar med definitionsmängden D, så att ytan täcks dubbelt eller missas.

Läsning

- 16.5 Surfaces and Surface Integrals

Se även

- Parametriserade ytor
- Flödesintegraler
- Dubbelintegraler
- Kurvintegraler
- Variabelbyte i trippelintegraler

Resurser

- Khan Academy: Surface integrals
- Wikipedia: Surface integral