M0068M-2025-05-28

Jun 23, 2026, 13 min read

#tenta #matematik #flervariabelanalys

> **Kurs:** M0068M — Flervariabelanalys **Datum:** 2025-05-28 **Examinator:** Thomas Strömberg **Källa:** originaltentamen med lösningsförslag

Översikt

Sju uppgifter som täcker hela kursen: tangentplan och kryssprodukt (1), kritiska punkter och Hessian (2), Lagrange via parametrisering (3), dubbelintegral över ett delat triangulärt område (4), volym genom skivning (5), kurvintegraler — direkt och via potential (6), och flöde genom halvsfär via Gauss (7). Räknat efter modul: M1·1 — M2·2 — M3·2 — M4·1 — M5·1.

---

1. Tangentplan och tangentvektor till skärningskurva

Låt P beteckna den punkt i $\mathbb{R}^3$ som har koordinaterna $(2,\ 1,\ -1)$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ellipsoiden $x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10$ i punkten P.

(b) Låt C beteckna skärningskurvan mellan ellipsoiden i (a) och planet $x + 2y + 4z = 0$. Bestäm en tangentvektor till C i punkten P.

Totalpoäng: 3

Lösning

---

2. Klassificera kritiska punkter

Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x, y) = x^3 + x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Totalpoäng: 4

Lösning

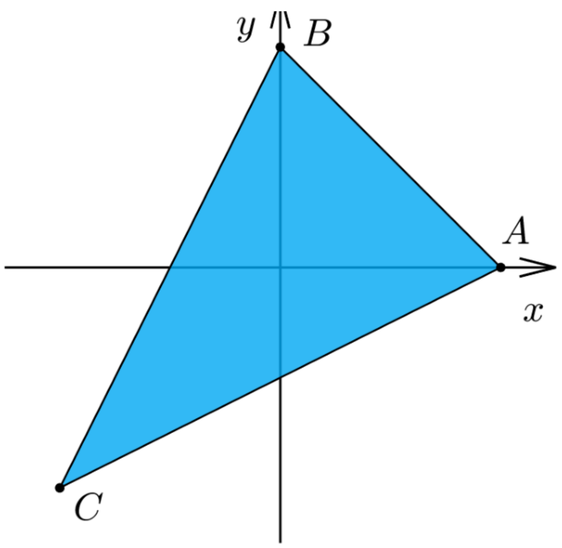
3. Optimering på en ellips

Bestäm maximum och minimum av $f(x, y) = x + y$ under bivillkoret $x^2 + 4y^2 = 4$.

Totalpoäng: 3

Lösning

4. Dubbelintegraler över ett triangulärt område



Låt T beteckna det triangulära område i $\mathbb{R}^2$ vars hörn ligger i punkterna $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ och $C = (-1, -1)$.

(a) Beräkna integralen $\iint_T x^2 \, dA$. *(4 p)*

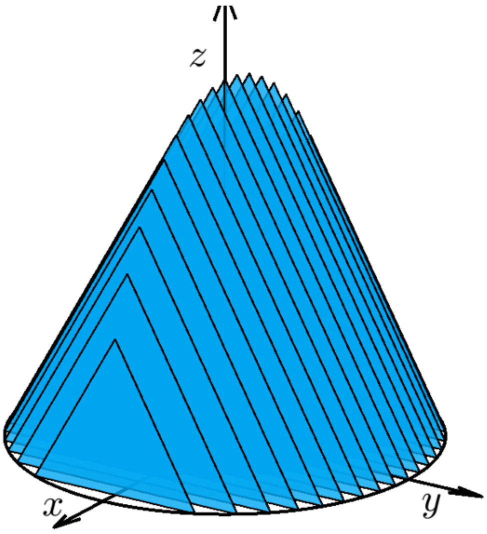
(b) Beräkna integralen $\iint_T y^2 \, dA$. *(1 p)*

Totalpoäng: 5

Lösning >

---

5. Volym av tält genom skivning



Ett tält står rest på en cirkulär basyta $x^2 + y^2 \leq a^2$ med radie $a > 0$. Om man skivar tältet i x-led, så har varje tvärsnitt i plan parallella med yz-planet formen av en liksidig triangel.

(a) Vad är arean av en liksidig triangel? Antag att sidlängden är L och uttryck svaret i L.

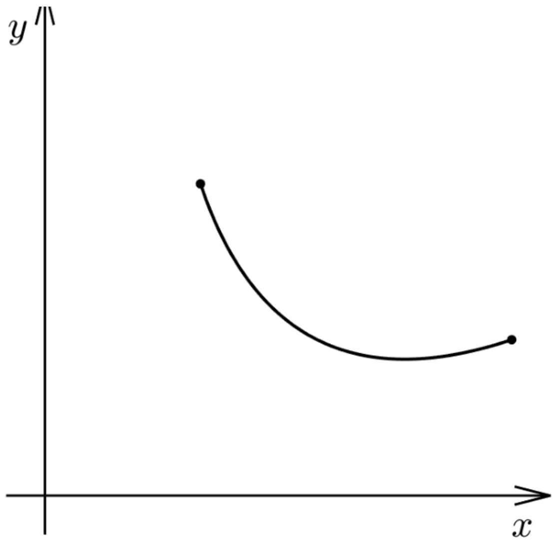
(b) Av figuren framgår att tvärsnittens storlek beror av x. Uttryck sidlängden L som en funktion av x.

(c) Beräkna tältets volym.

Totalpoäng: 5

Lösning >

6. Kurvintegraler längs parametriserad kurva



Låt C beteckna parameterkurvan i första kvadranten som definieras av

$$C : \begin{cases} x = t^2 - 3t + 3 \\ y = 2t^2 - t + 1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

genomlöpt från $t = 0$ till $t = 1$.

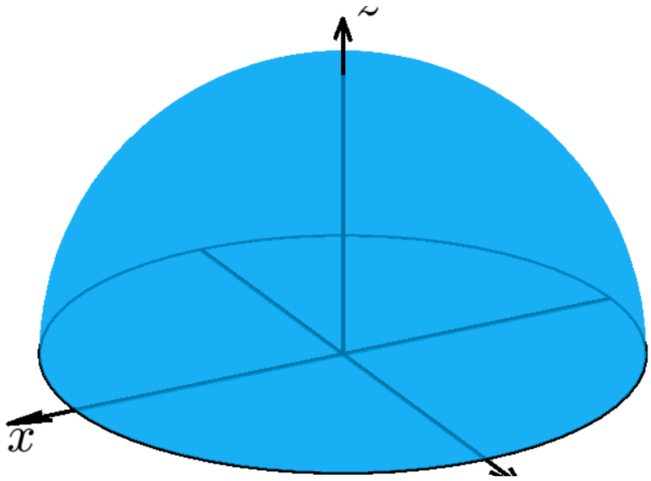
(a) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C x\,dy$.

(b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$.

Totalpoäng: 5

Lösning >

7. Flöde genom halvsfär – Gauss sats med slutning



Låt $\vec{F}$ beteckna vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\,\hat{i} + y^3 \sin z\,\hat{j} + 3y^2 \cos z\,\hat{k}.$$

(a) Beräkna divergensen av $\vec{F}$. *(1 p)*

(b) Bestäm flödet av $\vec{F}$ genom halvsfären $Y : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$, om Y är orienterad så att enhetsnormalen pekar bort från origo. *(4 p)*

Totalpoäng: 5

Lösning >

Se även

- M0068M — kursfilen, för översikt över examinationen.
- Tangentplanets ekvation — uppgift 1.
- Kritiska punkter, Extremvärdesproblem — uppgift 2 och 3.
- Lagranges multiplikatormetod — alternativ metod för uppgift 3.
- Dubbelintegraler — uppgift 4.
- Trippelintegraler — uppgift 5.
- Kurvintegraler av vektorfält — uppgift 6.

- Gauss sats, Divergens och rotation — uppgift 7.