

M0068M-2026-03-12

Jun 23, 2026, 13 min read

#tenta

#flervariabelanalys

Kurs: M0068M – Flervariabelanalys **Datum:** 2026-03-12 **Examinator:** Thomas Strömberg **Källa:** originaltentamen med lösningsförslag

📄 Översikt

Sju uppgifter över hela kursen: tangentplan via gradient och linjekorsning (1), kedjeregler och Eulers homogenitetsrelation (2), extremvärden på triangulärt område (3), variabelbyte i dubbelintegral (4), volym genom skivning (5), kurvintegraler – direkt och via potential (6), och flöde genom parametriserad konyta (7). Räknat efter modul: M1·1 – M2·2 – M3·1 – M4·1 – M5·2.

1. Tangentplan och linjens skärning

Pollux Fleetwood rör sin båt i planet $z = 0$ på den spegelblanka sjön Grasmere. Hans nät kan betraktas som en yta vars ekvation ges av

$$x + y^3z = y + xz^2.$$

Punkten $P = (1, -1, -2)$ är en punkt på nätet som ligger 2 m under vattenytan.

(a) Bestäm en ekvation för nätets tangentplan i punkten P .

(b) En fisk simmar i vattnet längs linjen

$$L: \quad 2x + y = 1, \quad z = -2$$

i riktning mot punkten P . I vilken riktning simmar fisken om den börjar sin färd i planet $x = 0$? Svara med en riktningsvektor \mathbf{v} . Kommer fisken att fastna i Pollux nät när den passerar punkten P ?

Totalpoäng: 3

 [Lösning >](#)

2. Kedjeregeln för $w = f(xz, yz)$

Låt $w = f(xz, yz)$ där $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett.

(a) Uttryck

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

i partiella derivator av f .

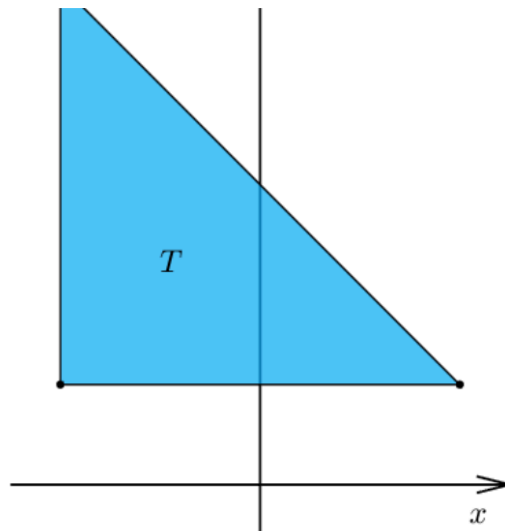
(b) Visa att

$$xw_x + yw_y = zw_z.$$

Totalpoäng: 3

 [Lösning >](#)

3. Extremvärden på triangel



Bestäm maxi- och minimivärdet av funktionen

$$1 + xy - 2x + y$$

på det triangulära området T med hörn i punkterna $(-2, 1)$, $(2, 1)$ och $(-2, 5)$ (se figur)

Bestäm maxi- och minimivärdet av funktionen

$$f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$$

på det triangulära området T med hörn i punkterna $(-2, 1)$, $(2, 1)$ och $(-2, 5)$ (se figur).

Totalpoäng: 4

[✎ Lösning >](#)

4. Dubbelintegral med byte av integrationsordning

Låt D beteckna det område i \mathbb{R}^2 som definieras av

$$D : \frac{\sqrt{x}}{2} \leq y \leq 1, \quad x \geq 0.$$

(a) Skissa området D i xy -planet och beräkna arean av D . (2 p)

(b) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^3} dA.$$

Tips: Integrera x först, sedan y . (3 p)

Totalpoäng: 5

[✎ Lösning >](#)

5. Volym av ett område i \mathbb{R}^3

Låt U beteckna det område i \mathbb{R}^3 som definieras av

$$U : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - y^2 \\ 0 \leq x \leq 2 - y - z \end{cases}$$

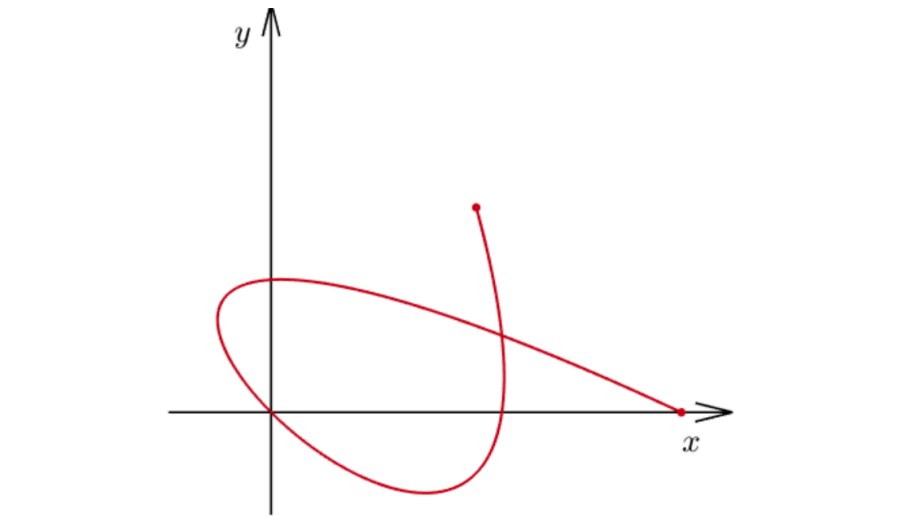
(a) Låt $P = (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i området U . Bestäm största och minsta värdet som P 's y -koordinat kan anta.

(b) Beräkna volymen av området U .

Totalpoäng: 5

[✎ Lösning >](#)

6. Kurvintegraler – direkt och via potential



C beteckna den orienterade kurva i \mathbb{R}^2 (se figur ovan) som definieras av parametreringen

$$\begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 3t \\ y = -4t^3 + t^2 + 3t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Låt C beteckna den orienterade kurva i \mathbb{R}^2 (se figur ovan) som definieras av parametreringen

$$C : \begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 3t \\ y = -4t^3 + t^2 + 3t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

(a) Ange kurvans startpunkt och slutpunkt. Skissa kurvans orientering med ledning av figuren. (1 p)

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (x + y) dy. \quad (2 \text{ p})$$

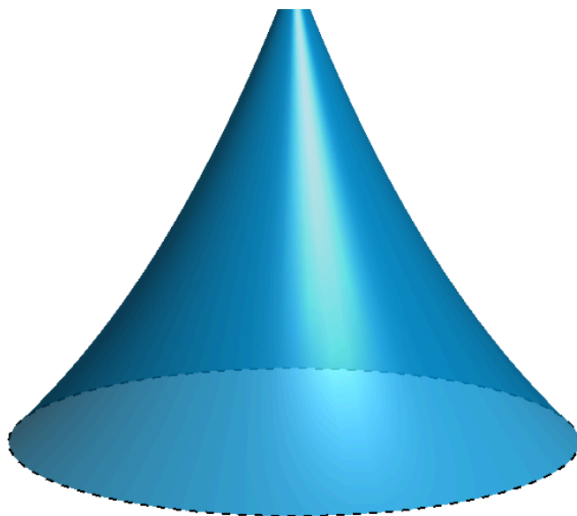
(c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \ln(1 + e^y) dx + \frac{xe^y}{1 + e^y} dy. \quad (2 \text{ p})$$

Totalpoäng: 5

[✎ Lösning >](#)

7. Flöde genom parametriserad tältduk



En genomskinlig tältduk (se figur) har formen av en parametriserad yta

$$\begin{cases} x = s \cos t \\ y = s \sin t \\ z = 3e^{-s} \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi).$$

1 det orienterade ytelementet $\hat{\mathbf{N}} dS$ om tältduken är orienterad så att normalen har positiv z -komponent. (2 p)

En genomskinlig tältduk har formen av en parametriserad yta

$$Y : \begin{cases} x = s \cos t \\ y = s \sin t \\ z = 3e^{-s} \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi).$$

(a) Bestäm det orienterade ytelementet $\hat{\mathbf{N}} dS$ om tältduken är orienterad så att enhetsnormalen har positiv z -komponent. (2 p)

(b) En vind blåser med hastigheten

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

genom tältduken. Bestäm flödet av \mathbf{F} genom Y . (3 p)

Totalpoäng: 5

[✎ Lösning >](#)

Se även

- [M0068M](#) – kursfilen
 - [Tangentplan](#) – uppgift 1
 - [Kedjeregeln för flera variabler](#) – uppgift 2
 - [Extremvärdesproblem](#) – uppgift 3
 - [Dubbelintegraler](#) – uppgift 4
 - [Volymberäkningar med trippelintegraler](#) – uppgift 5
 - [Konservativa vektorfält](#) – uppgift 6
 - [Flödesintegraler](#) – uppgift 7
 - [konventioner-tentor](#) – formatkontraktet
-